Maturità 2023
Quesito 8

Manolo Venturin

(con verifica in Python)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Questito 8

> Data la funzione $f(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

Soluzione

Due strategie risolutive:

1. Studio di funzione
2. Teorema di Sturm

Questito 8 (strategia 1)

$$f(x) = x^5 - 5ax + a \quad , \quad a > 0$$

Soluzione basata sullo studio di funzione

Obiettivo: Studiamo il comportamento (all'infinito e massimi e minimi) della funzione per identificare quanti zeri reali ci sono

All'infinito si ha

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Quindi per il teorema degli zeri delle funzioni continue ha almeno uno zero

Questito 8 (strategia 1)

$$f(x) = x^5 - 5ax + a \quad , \quad a > 0$$

Studiamo il comportamento della derivata prima

$$f'(x) \;=\; 5x^4 - 5a \;=\; 5(x^4 - a) \;=\; 5(x^2 - \sqrt{a})(x^2 + \sqrt{a})$$

Gli zeri di $f'(x)$ sono

$$f'(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pm\sqrt[4]{a}$$

Questito 8 (strategia 1)

$$f(x) = x^5 - 5ax + a \quad , \quad a > 0$$

$$f'(x) \;=\; 5(x^4 - a) \;=\; 5(x^2 - \sqrt{a})(x^2 + \sqrt{a})$$

Per il segno di $f'(x)$ si ha

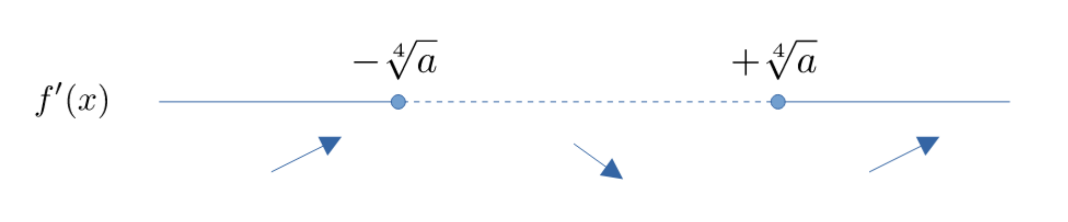
- $5(x^2 - \sqrt{a}) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \{x < -\sqrt[4]{a}\} \,\cup\, \{x > \sqrt[4]{a}\}$
- $x^2 + \sqrt{a} > 0$ sempre

i.e.

$$f'(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in \{x < -\sqrt[4]{a}\} \,\cup\, \{x > \sqrt[4]{a}\}$$

Questito 8 (strategia 1)

$$f'(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in \{x < -\sqrt[4]{a}\} \cup \{x > \sqrt[4]{a}\}$$

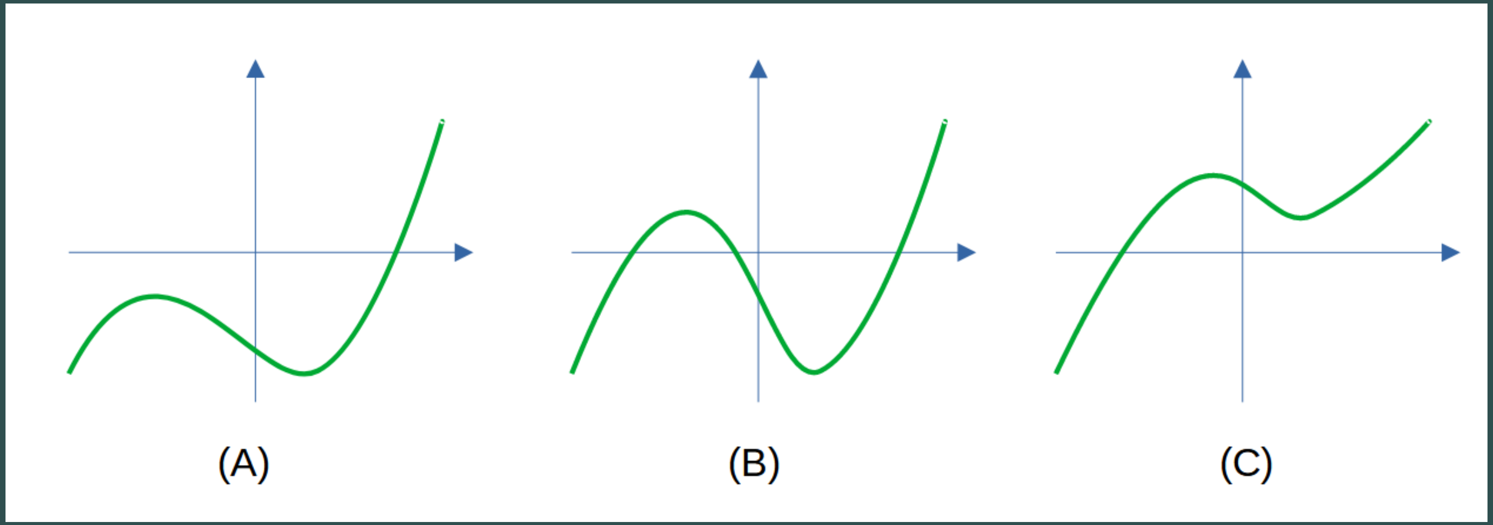


Quindi,

- $x = -\sqrt[4]{a}$ è un punto di massimo locale
- $x > \sqrt[4]{a}$ è un punto di minimo locale

Questito 8 (strategia 1)

Dalla informazioni precedenti possono succedere le seguenti situazioni



Quindi, affinché la funzione abbia 3 zeri reali e distinti deve succedere (caso B) che

- il massimo sia sopra l'asse delle x
- il minimo sia sotto l'asse delle x

Questito 8 (strategia 1)

$$f(x) = x^5 - 5ax + a \quad , \quad a > 0$$

Andiamo ad esplicitare le condizioni

- il massimo sia sopra l'asse delle x

$$y_{\max} = f\left(-\sqrt[4]{a}\right) = -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a = a(1 + 4\sqrt[4]{a})$$

$$y_{\max} > 0$$

- il minimo sia sotto l'asse delle x

$$y_{\min} = f\left(+\sqrt[4]{a}\right) = a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a = a(1 - 4\sqrt[4]{a})$$

$$y_{\min} < 0$$

Questito 8 (strategia 1)

- Soluzione di $y_{\max} > 0$

$$y_{\max} = a(1 + 4\sqrt[4]{a}) > 0 \implies \sqrt[4]{a} > -\frac{1}{4}$$

Sempre verificata (essendo $a > 0$)

- Soluzione di $y_{\min} < 0$

$$y_{\min} = a(1 - 4\sqrt[4]{a})) < 0 \implies \sqrt[4]{a} < \frac{1}{4} \implies a < \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

Questito 8 (strategia 2)

Soluzione basata sul teorema di Sturm

Il teorema di Sturm (variante dell'algoritmo di Euclide applicato ai polinomi), identifica il numero di radici reali presenti in un intervallo

Il teorema di Sturm costruisce, a partire dal polinomio $P = P_0$ e dalla sua derivata $P' = P_1$ costruisce la seguente sequenza di polinomi

$$\begin{aligned} P_0 &= P, \\ P_1 &= P', \\ P_{i+1} &= -\operatorname{rem}(P_{i-1}, P_i), \end{aligned}$$

Successivamente dovremo valutare $V(-\infty) - V(+\infty)$ ovvero il numero di variazioni della successione e questo corrisponde al numero di radici reali presenti

Questito 8 (strategia 2)

La successione di Sturm relativa a $P(x) = x^5 - 5ax + a$ è

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= P(x) = x^5 - 5ax + a \\
P_1(x) &= P'(x) = 5x^4 - 5a \\
P_2(x) &= -\operatorname{rem}(P_0|P_1) = 4ax - a \\
P_3(x) &= -\operatorname{rem}(P_1|P_2) = 5a - \frac{5}{256} = 5\left(a - \frac{1}{256}\right)
\end{aligned}$$

Il numero di variazioni dipende dal segno di $a - \frac{1}{256}$

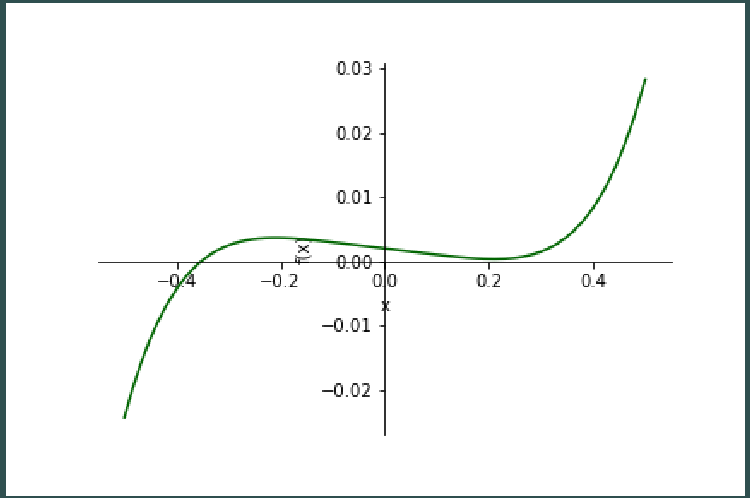
Questito 8 (strategia 2)

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= P(x) = x^5 - 5ax + a \\
P_1(x) &= P'(x) = 5x^4 - 5a \\
P_2(x) &= -\operatorname{rem}(P_0|P_1) = 4ax - a \\
P_3(x) &= -\operatorname{rem}(P_1|P_2) = 5a - \frac{5}{256} = 5\left(a - \frac{1}{256}\right)
\end{aligned}
$$

Se $a - \frac{1}{256} < 0$ si ha

- $V(-\infty) = V(-,+,-,-) = 2$
- $V(+\infty) = V(+,+,+,-) = 1$

$V(-\infty) - V(+\infty) = 2 - 1 = 1$



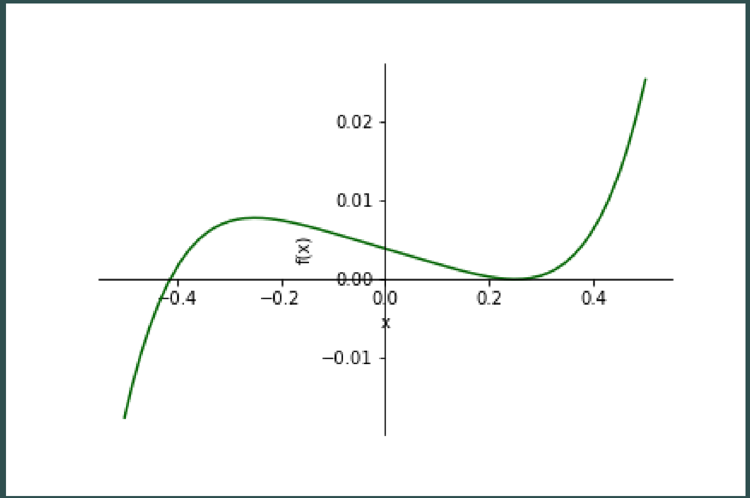
Questito 8 (strategia 2)

$$P_0(x) = P(x) = x^5 - 5ax + a$$
$$P_1(x) = P'(x) = 5x^4 - 5a$$
$$P_2(x) = -\operatorname{rem}(P_0|P_1) = 4ax - a$$
$$P_3(x) = -\operatorname{rem}(P_1|P_2) = 5a - \frac{5}{256} = 5\left(a - \frac{1}{256}\right)$$

Se $a = \frac{1}{256}$ si ha

- $V(-\infty) = V(-,+,-) = 2$
- $V(+\infty) = V(+,+,+) = 0$

$$V(-\infty) - V(+\infty) = 2 - 0 = 2$$



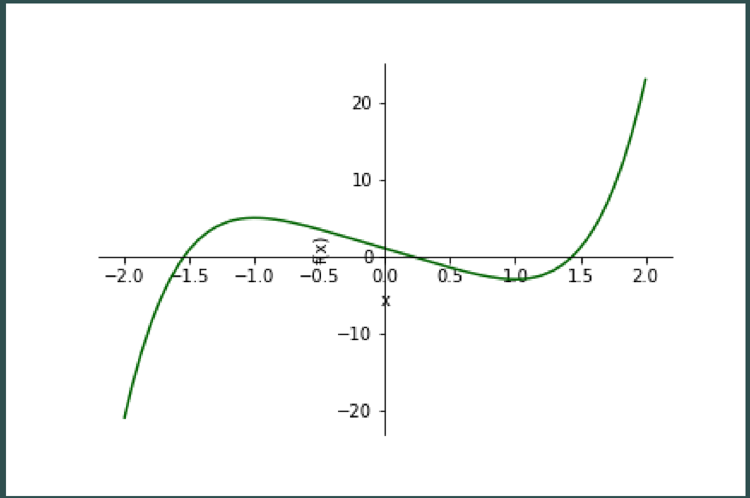
Questito 8 (strategia 2)

$$P_0(x) = P(x) = x^5 - 5ax + a$$
$$P_1(x) = P'(x) = 5x^4 - 5a$$
$$P_2(x) = -\operatorname{rem}(P_0|P_1) = 4ax - a$$
$$P_3(x) = -\operatorname{rem}(P_1|P_2) = 5a - \frac{5}{256} = 5\left(a - \frac{1}{256}\right)$$

Se $a - \frac{1}{256} > 0$ si ha

- $V(-\infty) = V(-,+,-,+) = 3$
- $V(+\infty) = V(+,+,+,+) = 0$

$V(-\infty) - V(+\infty) = 3 - 0 = 3$




FINE