Maturità 2023
Quesito 6
e Quesito 7

Manolo Venturin

(con verifica in Python)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Questiti

Questito 6

> Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché
>
> $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

Questito 7

> Si consideri la funzione
>
> $$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & , \quad x < 0 \\ ax + b & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$
>
> determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Questito 6

> Determinare i valori dei parametri reali a e b affinché
>
> $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

Soluzione

Due strategie risolutive:

1. De l’Hopital
2. Sviluppo in serie di Taylor

Questito 6 (strategia 1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(ax^3+bx)}{x^3}=1$$

Con De l'Hopital

Si tratta di una forma indeterminata

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(ax^3+bx)}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{(H)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-(3ax^2+b)}{3x^2}=1$$

Affinché questo sia possibile deve essere una forma indeterminata, ovvero deve verificare la condizione (numeratore deve essere zero)

$$\left(\cos x-(3ax^2+b)\right)\Big|_{x=0}=0 \implies 1-b=0 \implies b=1$$

Questito 6 (strategia 1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + x)}{x^3} = 1$$

Ora applicando due volte De L'Hopital (forma indeterminata) si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - (3ax^2 + 1)}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 6ax}{6x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x - 6a}{6} = 1$$

da cui la condizione

$$\frac{-1 - 6a}{6} = 1 \implies a = -\frac{7}{6}$$

Questito 6 (strategia 2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = 1$$

Con Taylor

Con lo sviluppo di Taylor del seno si ha

Per $x \to 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - (ax^3 + bx)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) - (ax^3 + bx)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\frac{1}{6} + a\right) x^3 + (1 - b)x + O(x^5)}{x^3}$$

Questito 6 (strategia 2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\left(\frac{1}{6}+a\right)x^3+(1-b)x+O(x^5)}{x^3}=1$$

Affinché possa essere 1 deve essere $b=1$ annullando il termine in x

Ora, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\left(\frac{1}{6}+a\right)x^3+O(x^5)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left[-\left(\frac{1}{6}+a\right)+O(x^2)\right]$$

e quindi è uguale a 1 se

$$-\left(\frac{1}{6}+a\right)=1 \implies a=-\frac{7}{6}$$

Quesito 7

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & , \quad x < 0 \\ ax + b & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

determinare per quali valori dei parametri reali a, b la funzione è derivabile.

Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

Quesito 7

Soluzione

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & , \quad x < 0 \\ ax + b & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Nei singoli intervalli $x < 0$ e $x > 0$ la funzione è continua e derivabile.

Rimane da studiare il comportamento per $x = 0$

In $x = 0$ studiamo le condizioni per la

- continuità
- derivabila

Nota: Se la funzione non è continua non può essere nemmeno derivabile

Quesito 7

Condizione di continuità in $x = 0$

Da

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

si ha

$$\lim_{x \to 0^-} (-1 + \arctan x) = (ax + b)\big|_{x=0} \quad \Longrightarrow \quad -1 = b$$

Quindi la funzione può essere resa continua in $x = 0$ scegliendo $b = -1$, i.e. diventa

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & , \quad x < 0 \\ ax - 1 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Quesito 7

$$f(x)=\begin{cases}-1+\arctan x & , \quad x<0\\ ax-1 & , \quad x\geqslant 0\end{cases}$$

<u>Condizione di derivabilità in</u> $x=0$

La derivata della funzione è

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & , \quad x<0\\ a & , \quad x>0\end{cases}$$

dove

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+x^2}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} a=a$$

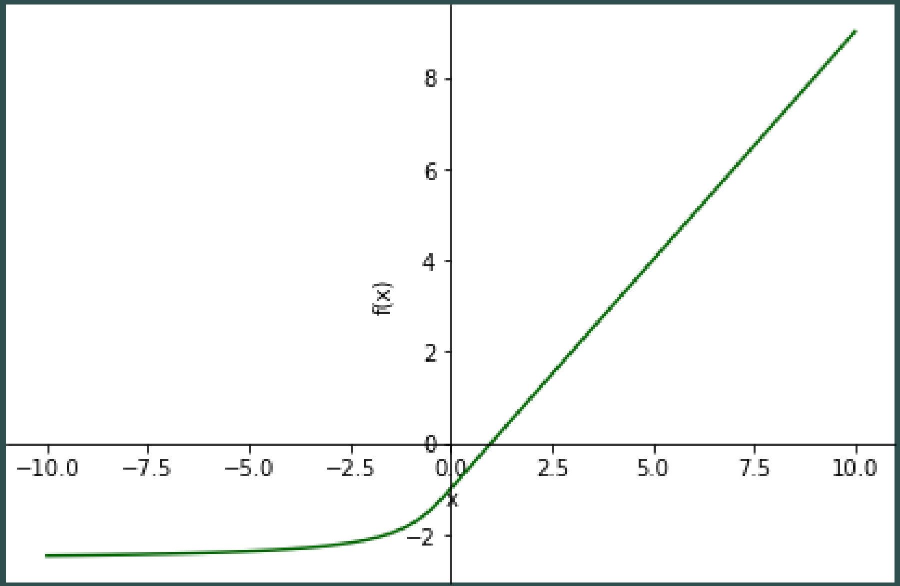
Per cui affinché sia derivabile deve essere soddisfatta la condizione (der. destra uguale alla derivata sinistra): $1=a$

Quesito 7

Per cui la mia funzione diventa

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \arctan x & , \quad x < 0 \\ x - 1 & , \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

Per migliorare la comprensione del problema si riesce a tracciare il grafico di $f(x)$ facilmente



Quesito 7

> Il **teorema di Rolle** afferma che se una funzione è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, derivabile in ogni punto dell'intervallo (a, b) e assume valori uguali agli estremi $f(a) = f(b)$, , allora esiste almeno un punto c interno ad (a, b) in cui la derivata si annulla $f'(c) = 0$.

Osserviamo che la funzione è sempre strettamente crescente, infatti i due termini della derivata prima sono sempre positivi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} > 0 & , \quad x < 0 \\ 1 > 0 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Di conseguenza essendo la funzione sempre strettamente crescente non ci saranno mai due valori uguali $f(a) = f(b)$ e quindi le ipotesi del teorema di Rolle non sono soddisfatte


FINE