Maturità 2023 Quesito 4 e Quesito 5

Manolo Venturin

(con verifica in Python)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Questiti

Questito 4

> Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Questito 5

> Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

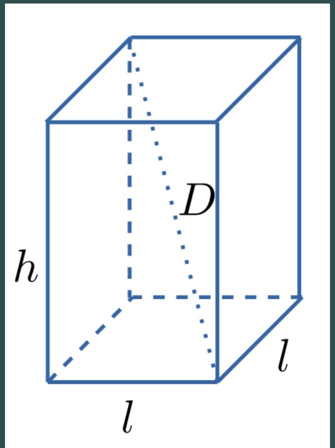
Questito 4

> Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume V, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

Premessa

Problema di minimizzazione vincola:

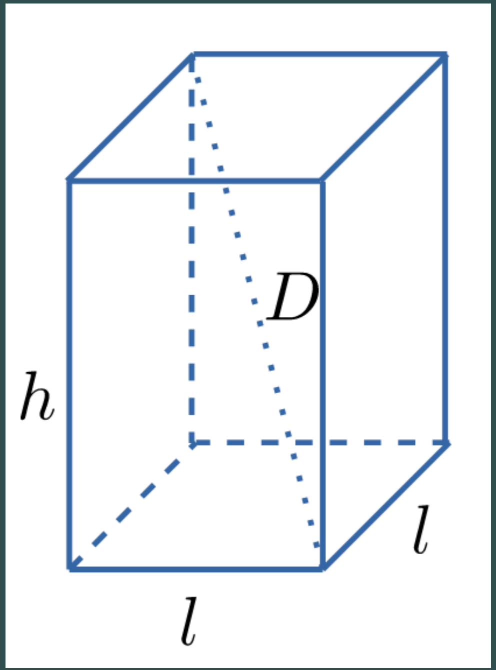
1. minimizzare area tolale: $A(l,h)$ con vincolo $V(l,h)=V$ (noto)
2. minimizzare lunghezza diagonale: $D(l,h)$ con vincolo $V(l,h)=V$ (noto)



Obiettivo: dimostrare che il minimizzatore del `Problema 1` (area totale) è lo stesso del `Problema 2` (diagonale)

Questito 4

Premessa



- Area di base: l^2
- Area laterale: $4lh$
- Area totale: $A = 2l^2 + 4lh$
- Volume: $V = l^2 h$
- Diagonale
  $D^2 = l^2 + l^2 + h^2 = 2l^2 + h^2$

Questito 4

<u>Strategia risolutiva generale</u>

> Formulare il problema come un problema di ottimizzazione non vincolata i.e.
>
> - si esplicita una variabile del vincolo $V = l^2 h$ (in questo caso sarà h)
> - e poi la si sostituisce nell'espressione da minimizzare
>   - `Problema 1`: $A(l, h) = A(l)$
>   - `Problema 2`: $D(l, h) = D(l)$

Questito 4

<u>Strategia risolutiva generale</u>

Osservazione:

Essendo $D(l) > 0$ allora i punti stazionari di $D(l)$ sono gli stessi di $D^2(l)$, infatti

$$\frac{dD^2(l)}{dl} = 2D(l) \cdot \frac{dD(l)}{dl} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dD(l)}{dl}$$

Usermo $D^2(l)$ invece di $D(l)$ perché così si semplificano i calcoli

Quindi dimostremo che

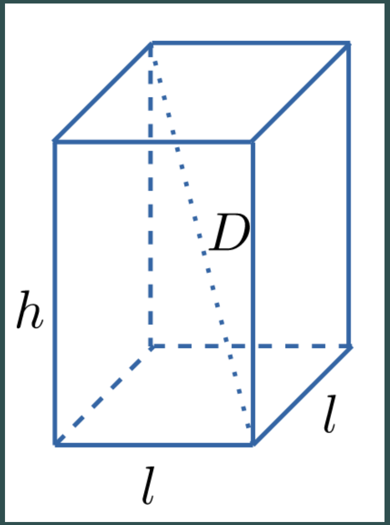
$$\text{argmin}_l\ A(l) \ = \ \text{argmin}_l\ D^2(l)$$

Questito 4 (min area totale)

Problema 1: minimizzatore dell'area totale

- Esplicitiamo una variabile del vincolo:

$$V = l^2 h \iff h = \frac{V}{l^2}$$



- Sostituiamo il vincolo nell'equazione da minimizzare dell'area totale

$$A = 2l^2 + 4lh = 2l^2 + 4l\frac{V}{l^2} = 2l^2 + 4\frac{V}{l}$$

- Troviamo i punti stazionari (dervata prima uguale a zero)

$$\frac{dA}{dl} = 0 \implies 4l - 4\frac{V}{l^2} = 0 \implies l^3 = V \implies l = \sqrt[3]{V}$$

Questito 4 (min area totale)

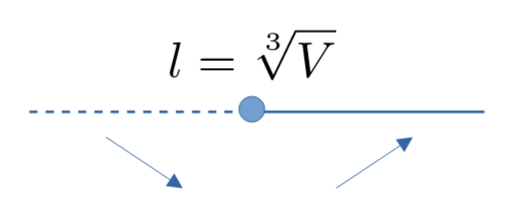
- Dimostriamo che è un punto di minimo

Due strategie possibili:

1. Studio della derivata prima
2. Criterio della derivata seconda (è minimo se > 0)

<u>**Metodo 1: Segno di $\frac{dA}{dl}$**</u>

$$4l - 4\frac{V}{l^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4l^3 - 4V}{l^2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad l^3 > V \quad \Longrightarrow \quad l > \sqrt[3]{V}$$



Questito 4 (min area totale)

Metodo 2: Derivata seconda $\frac{d^2A}{dl^2}$

$$\frac{d^2A}{dl^2} = \frac{d}{dl}\left(4l - 4\frac{V}{l^2}\right) = 4 + 8\frac{V}{l^3}$$

da cui

$$\left.\frac{d^2A}{dl^2}\right|_{l=\sqrt[3]{V}} = 4 + 8\frac{V}{V} = 12 > 0$$

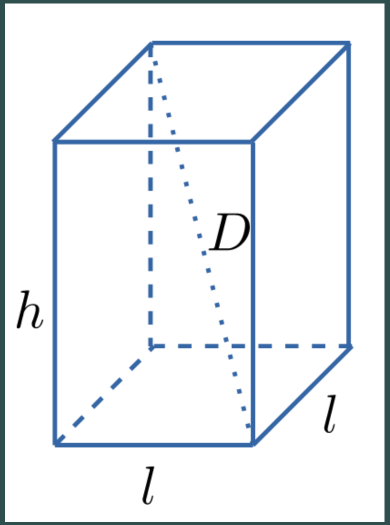
e quindi si tratta di un punto di minimo

Questito 4 (min diagonale)

Problema 2: minimizzatore della diagonale

- Esplicitiamo una variabile del vincolo:

$$V = l^2 h \iff h = \frac{V}{l^2}$$



- Sostituiamo il vincolo nell'equazione da minimizzare della diagonale

$$D^2 = 2l^2 + h^2 = 2l^2 + \frac{V^2}{l^4}$$

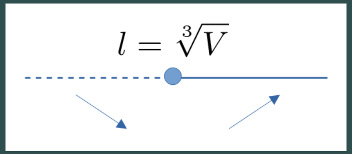
- Troviamo i punti stazionari (dervata prima uguale a zero)

$$\frac{dD^2}{dl} = 4l - 4\frac{V^2}{l^5} = 0 \implies 4l^6 = 4V^2 \implies l = \sqrt[3]{V}$$

Questito 4 (min diagonale)

Metodo 1: Segno di $\frac{dD^2}{dl}$

$$4l - 4\frac{V^2}{l^5} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4l^6 - 4V^2}{l^5} > 0 \quad \Longrightarrow \quad l^3 > V \quad \Longrightarrow \quad l > \sqrt[3]{V}$$



Metodo 2: Derivata seconda $\frac{d^2A}{dl^2}$

$$\frac{d^2D^2}{dl^2} = \frac{d}{dl}\left(4l - 4\frac{V^2}{l^5}\right) = 4 + 20\frac{V^2}{l^6} \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{d^2D^2}{dl^2}\right|_{l=\sqrt[3]{V}} = 4 + 20\frac{V^2}{V^2} = 24 > 0$$

e quindi si tratta di un punto di minimo (stesso risultato precedente)

Questito 4 (min diagonale)

Per completezza didattica, mostriamo che se scriviamo D invece di D^2 otteniamo lo stesso risultato

Da $D^2 = 2l^2 + \frac{V^2}{l^4}$ si ha

$$D = \sqrt{2l^2 + \frac{V^2}{l^4}}$$

Quindi il punto stazionario è

$$\frac{dD}{dl} = \frac{1}{2\sqrt{2l^2 + \frac{V^2}{l^4}}} \cdot \left(4l - 4\frac{V^2}{l^5}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad l = \sqrt[3]{V}$$

ecc. (sapendo che la radice è sempre positiva)

Questito 4

<u>Di quale figura geometrica si tratta?</u>

$$l = \sqrt[3]{V}$$

$$h = \frac{V}{l^2} = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{V}$$

Quindi si tratta di un cubo

Questito 5

> Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Soluzione

Lo risolviamo in tre modi diversi:

1. Derivate per la tangente
2. Gometrico: tangente punto appartenente alla circonferenza
3. Algebrico: $\Delta = 0$

Premessa

Per $x = 3$ si ha $y = \sqrt{25 - x^2}\Big|_{x=3} = 4$ quindi passa per punto $P = (3, 4)$

Quesito N. 5 (strategia 1)

<u>**Strategia 1: uso delle derivate**</u>

La derivata di

$$f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

è

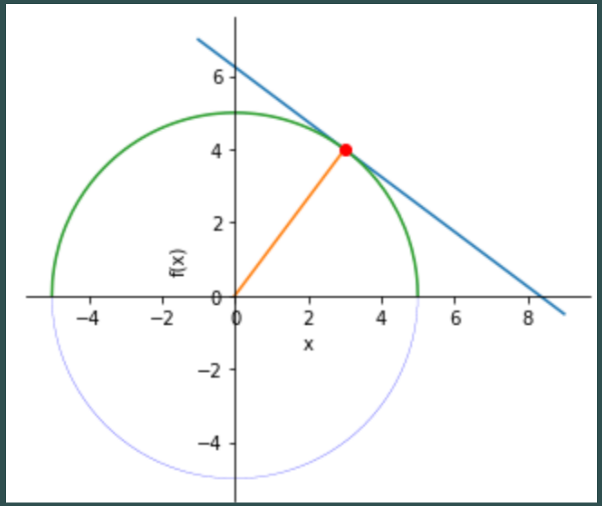
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

che valutata in $x = 3$ fornisce $m = f'(3) = -\frac{3}{4}$

Quesito N. 5 (strategia 1)

Strategia 1: uso delle derivate

L'equazione della tangente è passante per $P = (3, 5)$ con pendenza $m = -\frac{3}{4}$ è



$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x_0 = 3 \\ y_0 = 4 \\ m = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\implies \quad y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$\implies \quad y = -\frac{3}{4}x + 25/4$$

Quesito N. 5 (strategia 2)

<u>**Strategia 2: Gometrico**</u>

L'equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ rappresenta un arco di circonferenza della curva

$$y^2 = 25 - x^2 \implies x^2 + y^2 = 25$$

Circonferenza di centro $O = (0, 0)$ e raggio 5

Il punto di tangenza appartiene alla circonferenza quindi ha pendenza ortogonale alla retta che congiunge il centro al punto P

Quindi si ha $m_{\overline{OP}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$ da cui la pendenza della tengente

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m_{\overline{OP}}} = -\frac{3}{4}$$

Quesito N. 5 (strategia 3)

Strategia 3: $\Delta = 0$

Scriviamo il fascio proprio di rette passante per $P = (3, 4)$

$$y - 4 = m(x - 3)$$

e lo intersechiamo con l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 = 25$$

Quesito N. 5 (strategia 3)

<u>**Strategia 3:**</u> $\Delta = 0$

Mettendo a sistema il fascio di rette con la circonferenza si ha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - 4 = m(x-3) \end{cases}$$

$$\implies \quad x^2 + (m(x-3)+4)^2 = 25 \quad \implies$$

$$(1+m^2)x^2 + (-6m^2 + 8m)x + 9m^2 - 24m - 9 = 0$$

Quesito N. 5 (strategia 3)

<u>Strategia 3:</u> $\Delta = 0$

Ora, imponendo a

$$(1+m^2)x^2 + (-6m^2+8m)x + 9m^2 - 24m - 9 = 0$$

la condizione di tangenza (1 sola intersezione) $\Delta = 0$ con

$$a = 1+m^2 \quad , \quad b = -6m^2+8m \quad , \quad c = 9m^2 - 24m - 9$$

si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 16m^2 + 24m + 9 = (4m+3)^2 = 0$$

da cui $m = -\frac{3}{4}$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)