Maturità 2023
Quesito 1, Quesito 2 e Quesito 3

Manolo Venturin

(con verifica in Python)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Questiti

Questito 1

> Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A .
>
> Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.

Questito 2

> Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare la probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
>
> ● un numero primo; ● un numero almeno pari a 3; ● un numero al più pari a 3

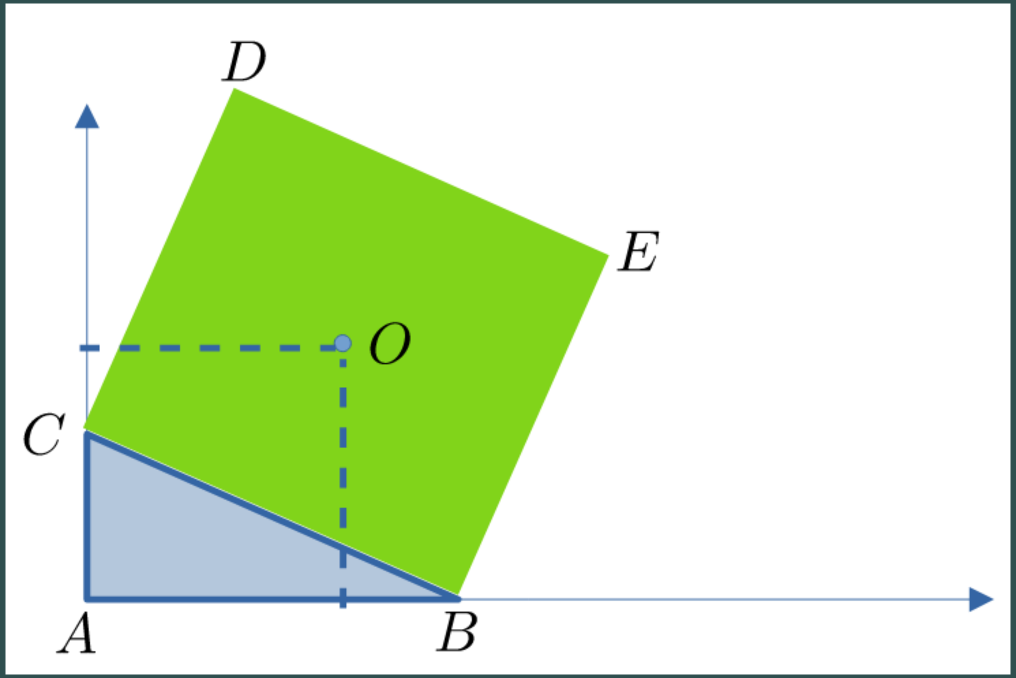
Questito 3

> Considerata la retta r passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente a r.

Questito 1

> Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato $BCDE$ costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A .
>
> Dimostrare che O è equidistante dalle rette AB e AC.

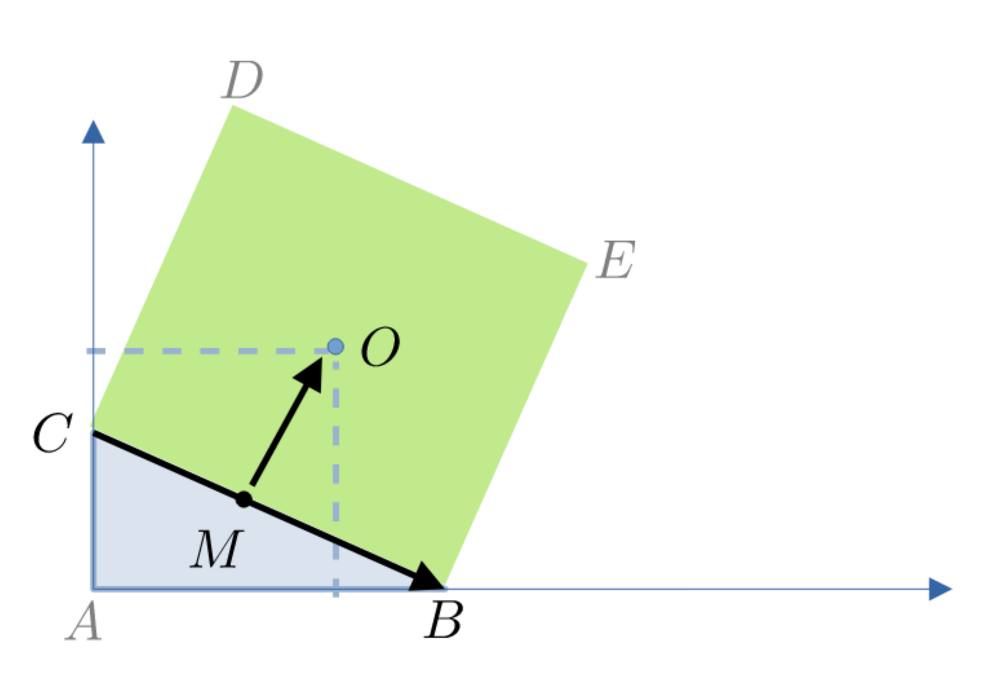
Premessa



Questito 1

Approcci possibile

- Geometria euclidea: giù tanti video fatti bene!
- **Geometria analitica e calcolo vettoriale**



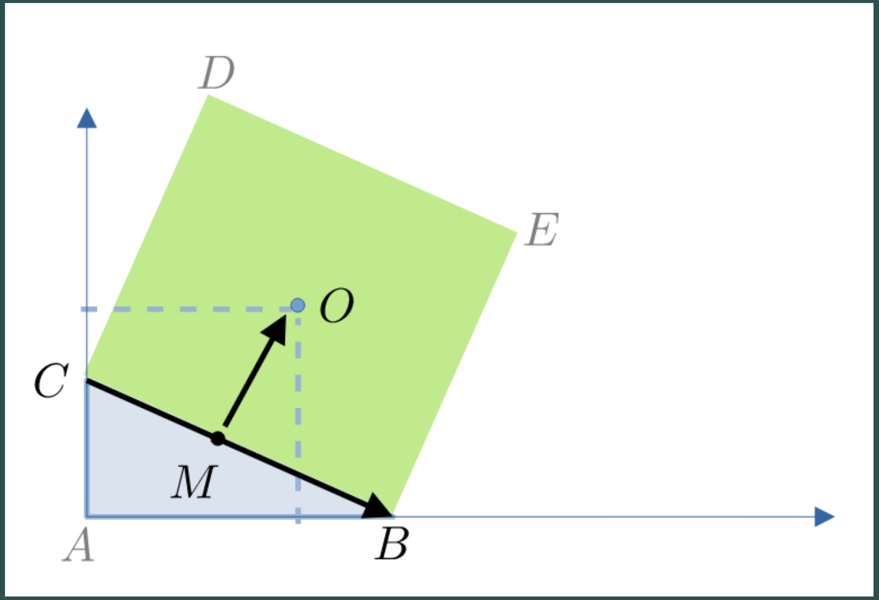
Questito 1

<u>Soluzione</u>

1. Costruzione del punto medio M

2. Dal punto M mi sposto in perpendicolarmente a $\overline{CB}$ di una lunghezza pari a $L/2$

3. Verifico che le coordinate di O così ottenenute sono uguali (sono anche le distanze dalle rette di AB e BC)



Questito 1

Soluzione

- Definizione di $\overline{v}_B$:

$$\overline{v}_B = (B, 0)$$

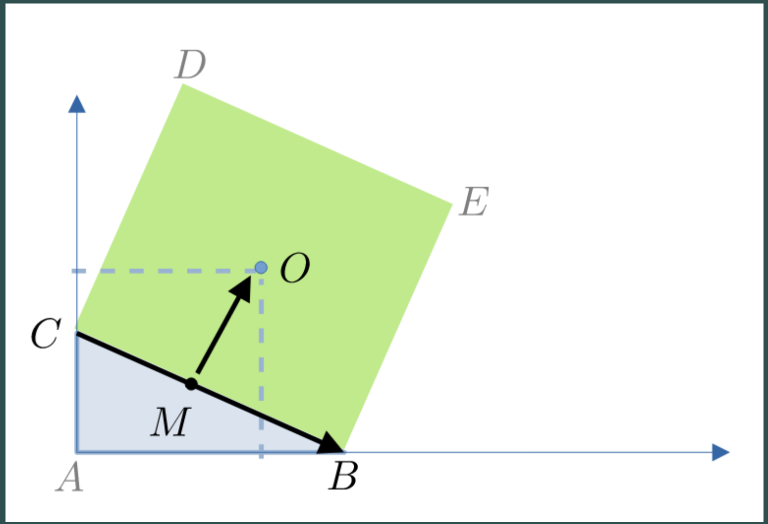
- Definizione di $\overline{v}_C$:

$$\overline{v}_C = (0, C)$$

- Definizione di $\overline{v}_{CB}$:

$$\overline{v}_{CB} = (B, -C)$$

- Lunghezza di $\overline{v}_{CB}$: $L = \sqrt{B^2 + C^2}$



Questito 1

<u>Soluzione</u>

- Costruisco $\overline{v}_{CB}^{\perp}$ orgonale a $\overline{v}_{CB} = (B, -C)$ che punti verso l'alto

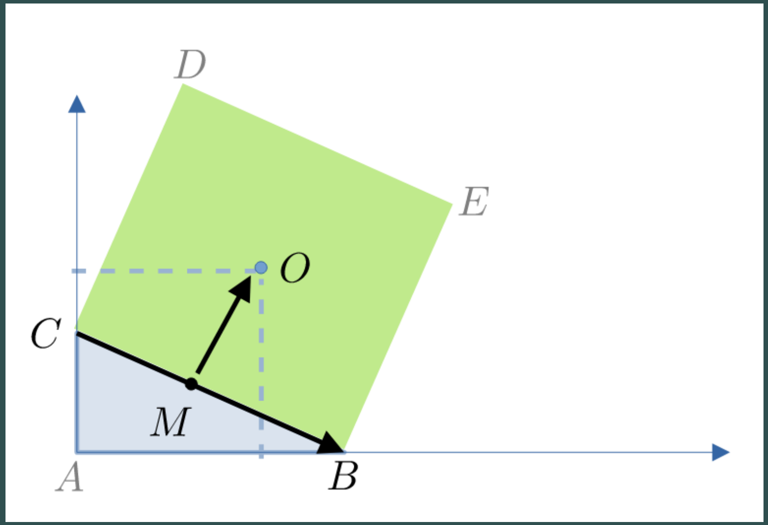
$$\overline{v}_{CB}^{\perp} = \frac{1}{L}(C, B)$$

- Verifico che $\overline{v}_{CB}^{\perp}$ è di lunghezza unitaria:

$$\frac{\sqrt{C^2 + B^2}}{L} = 1$$

- Verifico che $\overline{v}_{CB}$ e $\overline{v}_{CB}^{\perp}$ sono ortogonali (attraverso il prodotto scalare):

$$\overline{v}_{CB} \cdot \overline{v}_{CB}^{\perp} = (B, -C) \cdot \frac{1}{L}(C, B) = \frac{1}{L}(BC - CB) = 0$$

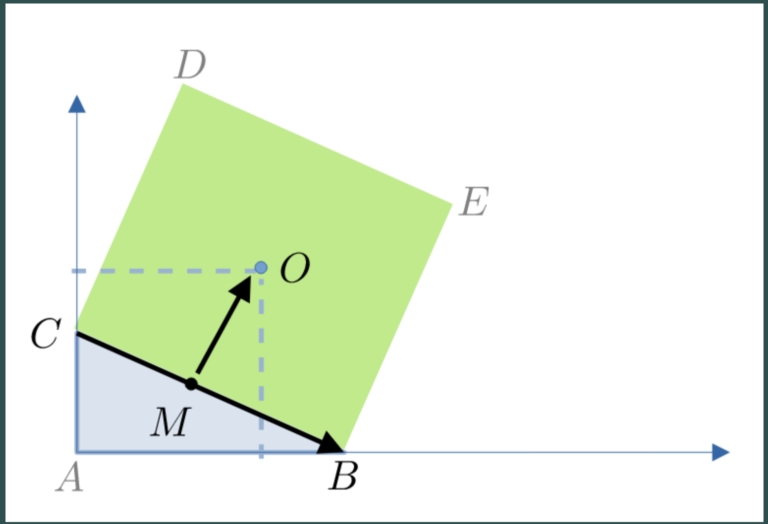


Questito 1

Soluzione

- Trovo il punto medio M tra B e C:

$$M = \left(\frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right)$$



- Trovo O spostandomi da M in modo ortogonale a BC di una lunghezza pari a $L/2$:

$$O = M + \vec{v}_{CB}^{\perp} \cdot \frac{L}{2} = \left(\frac{B}{2}, \frac{C}{2}\right) + \frac{\cancel{L}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{L}}(C, B) = \left(\frac{B+C}{2}, \frac{C+B}{2}\right)$$

- Verificato

Questito 2

> Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare la probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente:
>
> - un numero primo
> - un numero almeno pari a 3
> - un numero al più pari a 3

Questito 2

Soluzione

- Facce dispari: 1, 3, e 5 con probabilità p
- Facce pari: 2, 4, e 6 con probabilità $2p$

Dal fatto che la probabilità totale sia 1 allora è possibile scrivere la seguente equazione

$$3 \cdot (2p) + 3 \cdot (p) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{1}{9}$$

Quindi l'uscita di una faccia **dispari** a probabilità $p = \frac{1}{9}$ mentre l'uscita di una faccia **pari** a probabilità $2p = \frac{2}{9}$

Questito 2

<u>Esca un numero primo</u>

I numeri primi compresi tra 1 e 6 sono: 2, 3 e 5 (1 non viene considerato primo)

Quindi, si ha

$$\begin{aligned} P[\text{primo}] &= P[2] + P[3] + P[5] \\ &= 2p + p + p \\ &= 4p = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Questito 2

Esca un numero almeno pari a 3

$$\begin{aligned} P[\text{almeno pari a } 3] &= P[\text{Faccia} \geqslant 3] \\ &= P[3] + P[4] + P[5] + P[6] \\ &= p + 2p + p + 2p \\ &= 6p = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Questito 2

<u>Esca un numero al più pari a 3</u>

$$\begin{aligned} P[\text{almeno più } 3] &= P[\text{Faccia} \leqslant 3] \\ &= P[1] + P[2] + P[3] \\ &= p + 2p + p \\ &= 4p = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Quesito 3

> Considerata la retta r passante per i due punti $A(1, -2, 0)$ e $B(2, 3, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C(1, -6, 7)$ e tangente a r.

<u>**Premessa**</u>

Ecco il ragionamento:

- Dati i due punti A e B trovo l'equazione della retta (una retta nello spazio è individuata dall'intersezione di due piani)
- Scrivo la famiglia parametrica di sfere di centro C e raggio r
- Metto ad intersezione ed impongo la condizione di tangenza $\Delta = 0$

Quesito 3

<u>Equazione parametrica della retta</u>

Dati i punti $A(1,-2,0)$ e $B(2,3,-1)$ l'equazione parametrica della retta è

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}_\mathbf{0} + t \cdot \bar{\mathbf{d}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

dove il punto iniziale qualunque appartenete alla retta r ad esempio $\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{0} = A$ e il vettore direzione $\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{A}}$ si ottiene dalla differenza tra i due punti A e B (visti come vettori) ottenendo

$$\bar{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quesito 3

<u>Equazione parametrica della retta</u>

Quindi abbiamo l'equazione parametrica della retta r diventa

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{A}} + t \cdot (\bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{A}})$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che quando $t = 0$ otteniamo il punto A e quando $t = 1$ otteniamo il punto B

Quesito 3

__Retta come intersezione di piani__

Da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

possiamo anche esplicitare tale equazione in

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ y + 2 = 5t \\ z = -t \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x - 1 = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-1}$$

ovvero

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + 5z + 2 = 0 \end{cases}$$

dove la retta è individuata dall'intersezione di due piani

Quesito 3

<u>Famiglia di sfere</u>

La famiglia di sfere centrate in $C(1,-6,7)$ con raggio $r>0$ è

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2=r^2$$

che vanno intersecate con la retta

$$\begin{cases} x+z-1=0 \\ y+5z+2=0 \end{cases}$$

Quesito 3

<u>Intersezione tra sfere e retta</u>

Dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y + 5z + 2 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = r^2 \end{cases}$$

Da

$$\begin{cases} x = 1 - z \\ y + 5z + 2 = -2 - 5z \end{cases}$$

si ha

$$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = r^2$$
$$\Downarrow$$
$$(1-z-1)^2 + (-2-5z+6)^2 + (z-7)^2 = r^2$$

Quesito 3

Intersezione tra sfere e retta

$$(x-1)^2+(y+6)^2+(z-7)^2=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$(1-z-1)^2+(-2-5z+6)^2+(z-7)^2=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$z^2+(-5z+4)^2+(z-7)^2=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$z^2+25z^2-40z+16+z^2-14z+49=r^2$$
$$\Downarrow$$
$$27z^2-54z+65-r^2=0$$

Quesito 3

<u>Intersezione tra sfere e retta</u>

Imponendo a

$$27z^2 - 54z + 65 - r^2 = 0$$

la condizione di tangenza $\frac{\Delta}{4} = 0$ dove $a = 27, b = -54, c = 65 - r^2$ si ha

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 27^2 - 27 \cdot (65 - r^2) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad -(65 - r^2) = -27$$
$$\Longrightarrow \quad r^2 = 65 - 27 = 38$$

E quindi l'equazione della sfera cercata sarà

$$(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 38$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)