Maturità 2023
Problema 2

Manolo Venturin

(con verifica in Python)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Problema 2

PROBLEMA 2

Fissato un parametro reale a, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita:

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$

il cui grafico sarà indicato con Ω_a.

a) Al variare del parametro a, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a. Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico Ω_{-1}.

d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

A

> Fissato un parametro a, con $a \neq 0$, si consideri la funzione f_a così definita
>
> $$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$$
>
> il cui grafico sarà indicato con Ω_a.
>
> Al variare del parametro a, determinare il dominio di f_a, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti

Soluzione

Discussione dei casi notevoli in cui a fa cambiare il dominio o gli asintoti

A

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \quad , \quad a \neq 0$$

Dominio

- se $a < 0$ allora $x^2 - a$ (è irriducibile) quindi il dominio è $\mathbb{R}$
- se $a > 0$ il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{a}\}$

A

Asintoti verticali

Esistono solo se $a > 0$ e sono $x = \pm\sqrt{a}$ (zeri del denominatore) e $\lim_{x \to \pm\sqrt{a}} f_a(x) = \infty$

Quindi

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{a}} f_a(x) = \left[\frac{a \mp a\sqrt{a}}{a^{\pm} - a}\right] = \left[\frac{a(1 - \mp\sqrt{a})}{0^{\pm}}\right]$$

Ricordando che $a \neq 0$, si ha che il limite è infinito sse (il caso $+$ non può essere)

$$\begin{aligned} &(1 + \sqrt{a}) \neq 0 \quad (\text{mai}) \\ &(1 - \sqrt{a}) \neq 0 \quad \implies \quad a = 1 \end{aligned}$$

Quindi il caso $a = 1$ va trattato separatamente

A

Riassumendo vanno trattati separatamente i seguenti casi (dal testo $a \neq 0$)

- $a < 0$
- $a = 1$
- $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$

<u>Osservazione</u>

La funzione $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$ può anche essere riscritta come

$$f_a(x) \ = \ \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \ = \ \frac{(x^2 - a) + a - ax}{x^2 - a} \ = \ 1 - a\frac{x - 1}{x^2 - a}$$

e se $a > 0$ può essere riscritta fattorizzata come

$$f_a(x) \ = \ \frac{x(x - a)}{(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})}$$

A

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \quad , \quad a \neq 0$$

Caso: $a < 0$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Discontinuità: non ce ne sono
- Asintoti verticali: non ce ne sono
- Asintoti orizzontali (risultato che non dipende da a):

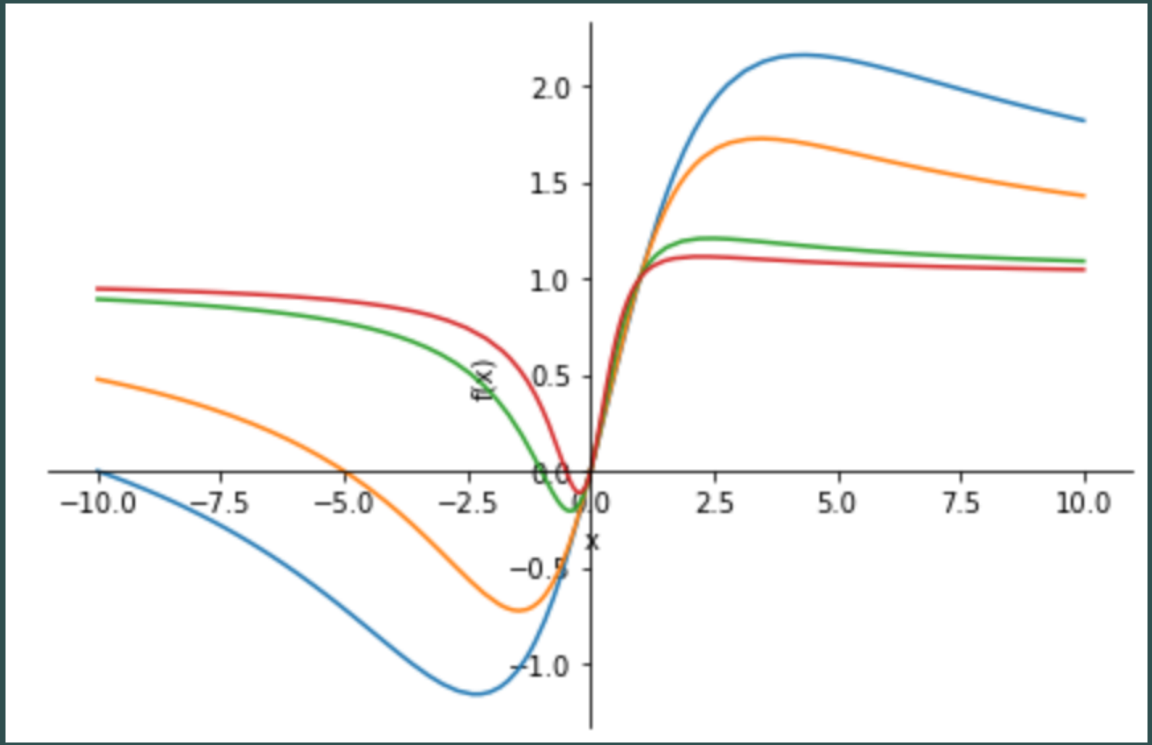
$$\lim_{x \to \pm\infty} f_a(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \sim \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Quindi la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale per $f_a(x)$

A

Caso: $a < 0$

Esempio di grafici della famiglia



A

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \quad , \quad a = 1$$

Caso: $a = 1$

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
- Asintoti orizzontali: come il caso $a < 0$

Osserviamo che (se $x \neq 1$) si ha

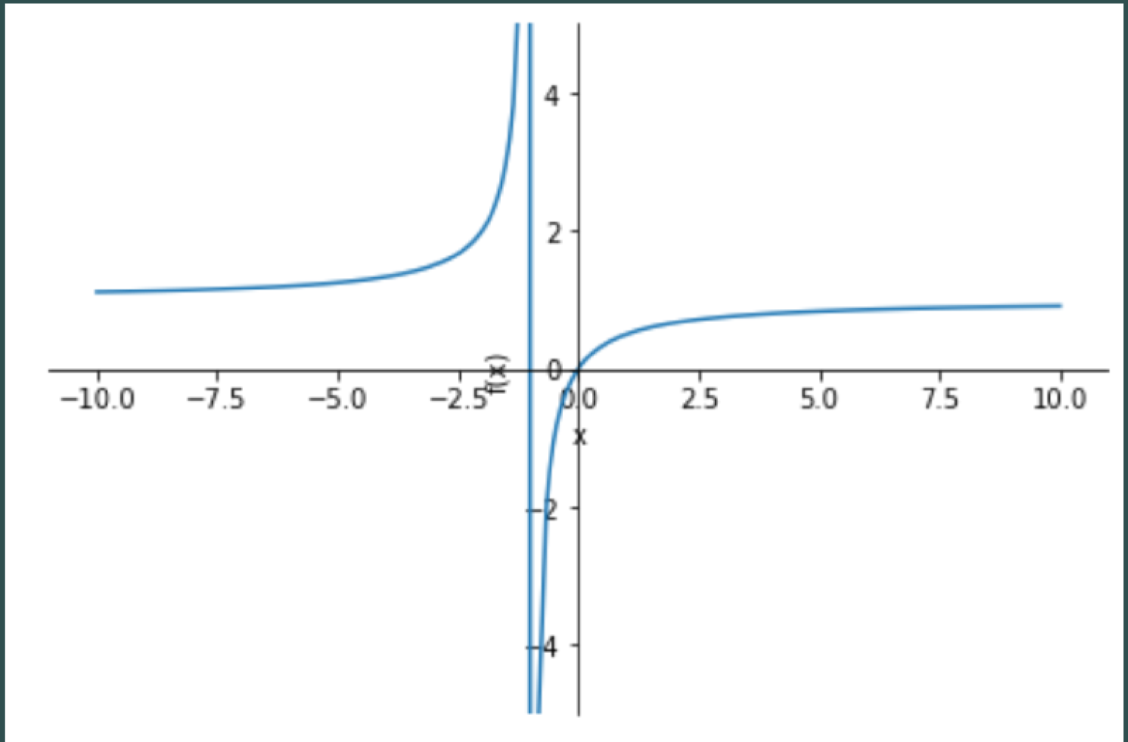
$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

Quindi $x = 1$ è un punto di discontinuità eliminabile (con valore $1/(1+1) = 1/2$) mentre in $x = -1$ la funzione è discontinua è ha un asintoto verticale infatti $\lim_{x \to 1^{\pm}} f_{-1}(x) = \infty$

A

Caso: $a = 1$

Esempio di grafico (iperbole equilatera)



A

$$f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} \quad , \quad a \neq 0$$

Caso: $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$ dove $a \pm a\sqrt{a} \neq 0$

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{a}\}$
- Asintoti orizzontali: come il caso $a < 0$

Si ha

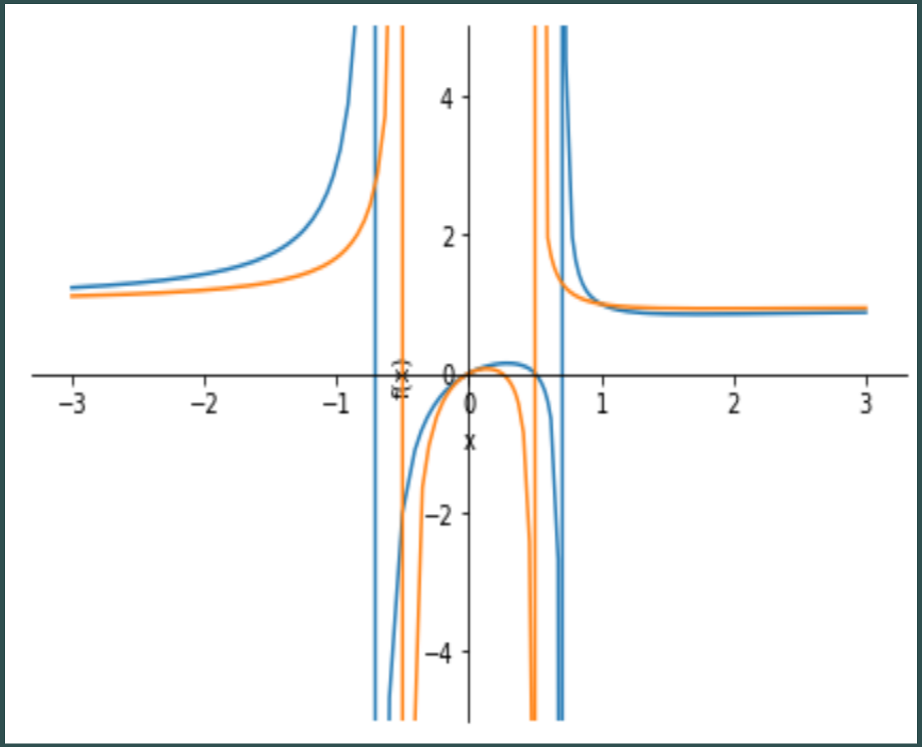
$$\lim_{x \to \pm\sqrt{a}^{\pm}} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = \left[\frac{a \pm a\sqrt{a}}{0^{\pm/\mp}}\right] = \left[\frac{\text{numero}}{0}\right] = \infty$$

Quindi $x = \pm\sqrt{a}$ sono due asintoti verticali (dove la funzione è discontinua)

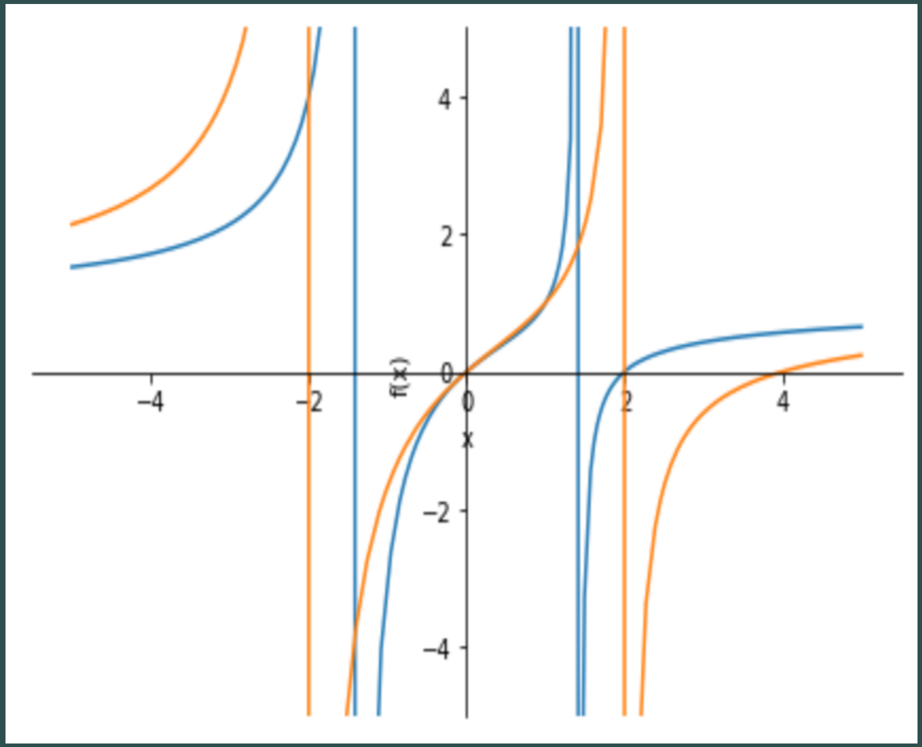
A

<u>Caso:</u> $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$

Esempio di grafici della famiglia



$0 < a < 1$



$a > 1$

B.1

> Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici di Ω_a intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto.

Soluzione

Se $a \neq 1$ (e $a \neq 0$) allora

$$\begin{cases} y = \frac{x^2-ax}{x^2-a} = 1 - a\frac{x-1}{x^2-a} \\ y = 1 \end{cases} \implies -a\frac{x-1}{x^2-a} = 0 \implies x = 1$$

Tutte le funzione $f_a(x)$ con $a \neq 1$ (e $a \neq 0$) passano per il punto $(1, 1)$

B.2

> Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici di Ω_a condividono la stessa retta tangente nell'origine.

<u>**Soluzione**</u>

La derivata di $f_a(x) = \frac{x^2-ax}{x^2-a} = 1 - a\frac{x-1}{x^2-a}$ è

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= -a\left((x-1)\cdot(-1)\frac{1}{(x^2-a)^2}\cdot 2x \;+\; 1\cdot\frac{1}{x^2-a}\right) = -a\frac{(-x+1)2x+(x^2-a)}{(x^2-a)^2} \\ &= a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2} \end{aligned}$$

Per $x=0$ si ha $f_a(0)=0$ e $m = f_a'(0) = a\frac{a}{a^2} = 1$ da cui la retta tangente

$$y - 0 = m(x-0) \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

che risulta indipendente da a

C.1

> Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione f_a.

<u>**Soluzione**</u>

Dobbiamo distiungue i due casi

- $a < 0$
- $0 < a < 1$

La monotonia dipende dal segno della derivata prima $f_a'(x) = a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}$ che a sua volta dipende dal segno dei tre fattori seguenti

- a
- $x^2 - 2x + a$
- $(x^2 - a)^2$

C.1

$$f_a'(x) = a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}$$

Caso: $a < 0$

Per i singoli termini della derivata si ha:

- a: sempre negativo
- $(x^2-a)^2$: sempre positivo
- x^2-2x+a: da studiare

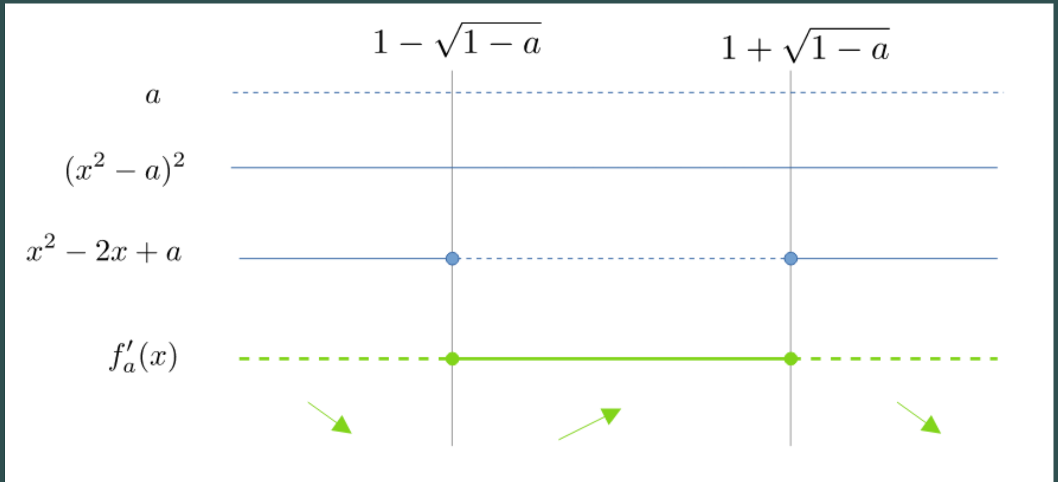
$x^2-2x+a=0 \implies x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ (formula di secondo grado ridotta)

Se $a < 0 \implies 1-a > 0$ e quindi $\sqrt{1-a}$ esiste sempre, quindi

$$x^2-2x+a > 0 \implies \{x < 1-\sqrt{1-a}\} \cup \{x > 1+\sqrt{1-a}\}$$

C.1

Caso: $a < 0$

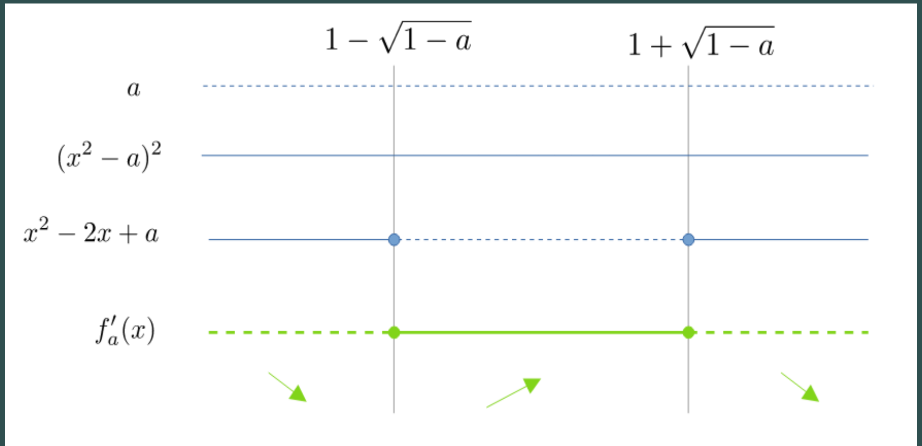


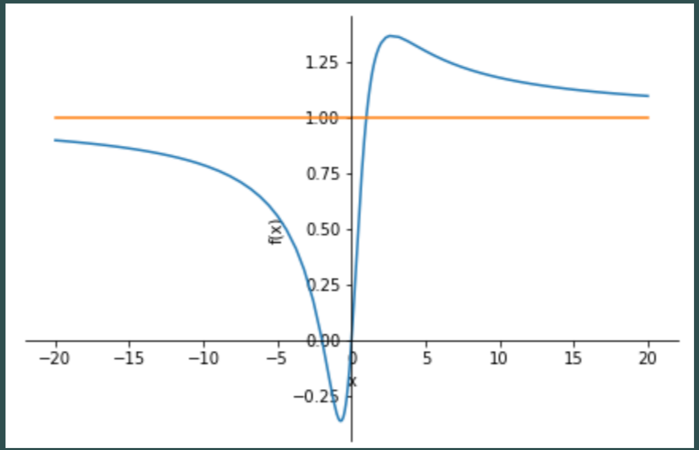
Quindi, si ha

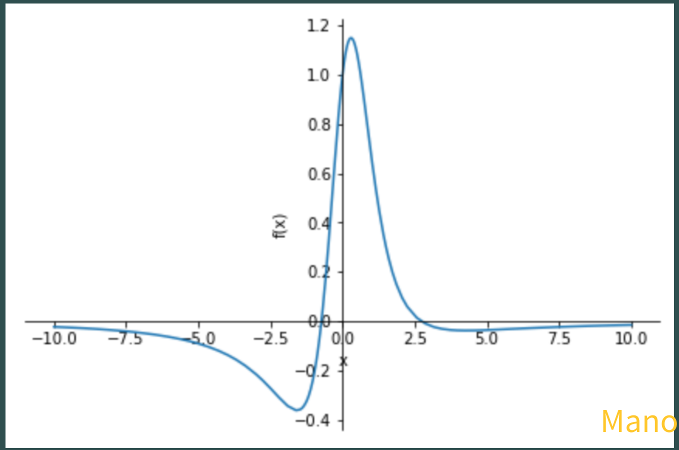
- $x = 1 - \sqrt{1-a}$ è un punto di minimo relativo
  (anche assoluto dal momento che si fa asintotica a $y = 1$)
- $x = 1 + \sqrt{1-a}$ è un punto di massimo relativo
  (anche assoluto dal momento che si fa asintotica a $y = 1$)

C.1

Caso: $a < 0$







C.1

$$f_a'(x) \quad = \quad a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}$$

Caso: $0 < a < 1$

Per i singoli termini della derivata si ha:

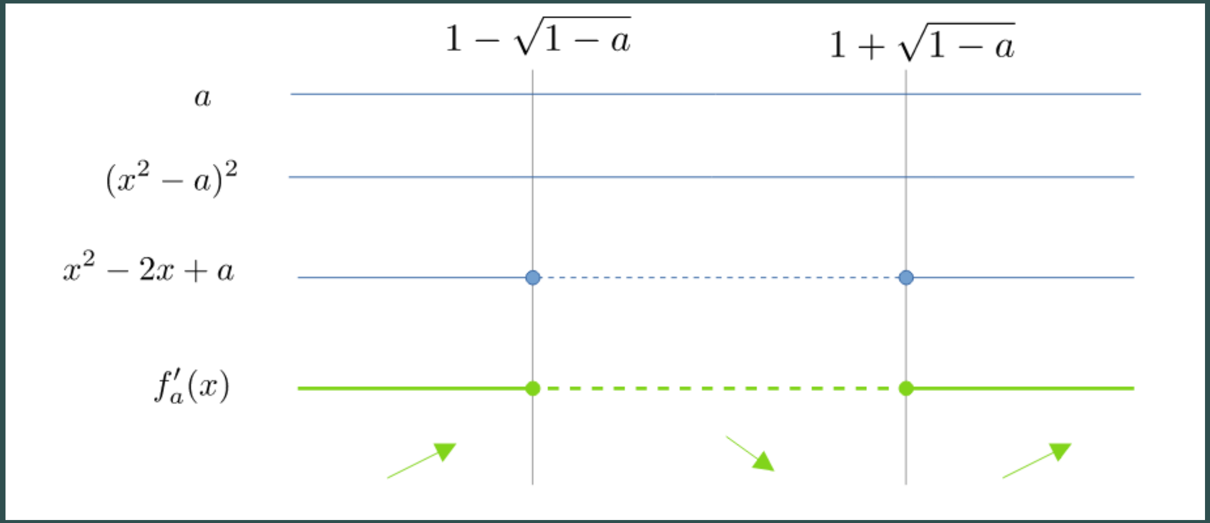
- a: sempre positivo
- $(x^2-a)^2$: sempre positivo
- x^2-2x+a: da studiare

$x^2-2x+a=0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ (formula di secondo grado ridotta)

Se $0 < a < 1 \quad \Longrightarrow \quad 1-a > 0$ e quindi $\sqrt{1-a}$ esiste sempre, quindi

$$x^2-2x+a > 0 \quad \Longrightarrow \quad \{x < 1-\sqrt{1-a}\} \ \cup \ \{x > 1+\sqrt{1-a}\}$$

C.1



Quindi, si ha

- $x = 1 - \sqrt{1-a}$ è un punto di massimo relativo
- $x = 1 + \sqrt{1-a}$ è un punto di minimo relativo

Attenzione: Non abbiamo disegnato i punti di esclusione del dominio che sono $\pm\sqrt{a}$

C.1

Studiamo la posizione di $\pm\sqrt{a}$ rispetto a $1 \pm \sqrt{1-a}$ con $0 < a < 1$

- $1 \pm \sqrt{1-a} > 0$
- $1 - \sqrt{1-a} < 1 + \sqrt{1-a}$
- $\sqrt{a} < 1$ e quindi non potrà mai essere maggiore di $1 + \sqrt{1-a}$
- $-\sqrt{a} < 0$ e quindi è minore di $1 - \sqrt{1-a} > 0$

$$\sqrt{a} > 1 - \sqrt{1-a} \quad \Longrightarrow \quad a > 1 - 1 + a - 2\sqrt{1-a} \quad \Longrightarrow \quad 2\sqrt{1-a} > 0$$

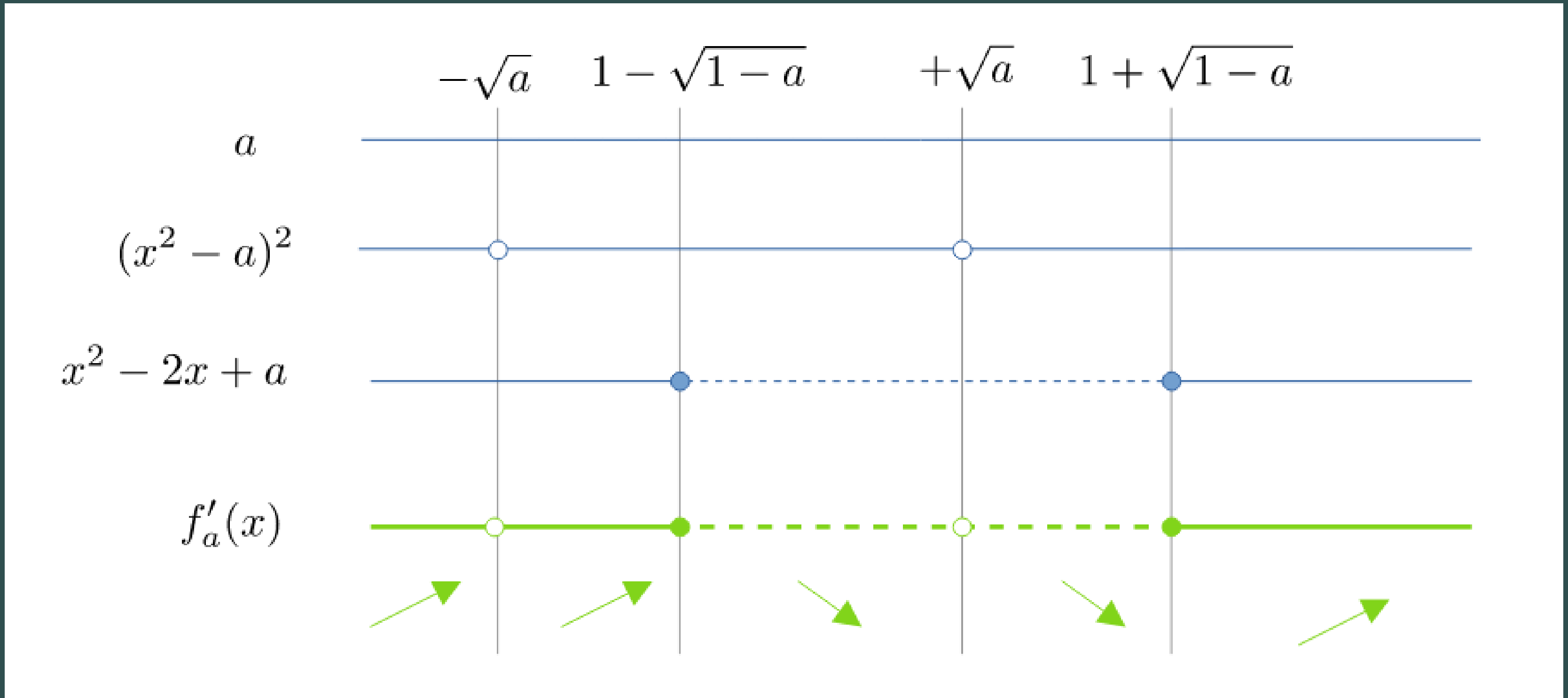
sempre verificata, quindi si ha

- $\sqrt{a} > 1 - \sqrt{1-a}$

E quindi

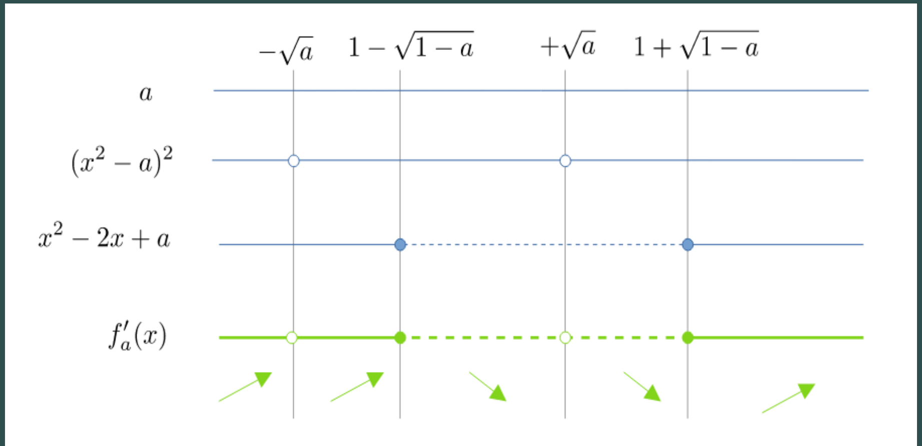
$$-\sqrt{a} \; < \; 1 - \sqrt{1-a} \; < \; \sqrt{a} \; < \; 1 + \sqrt{1-a}$$

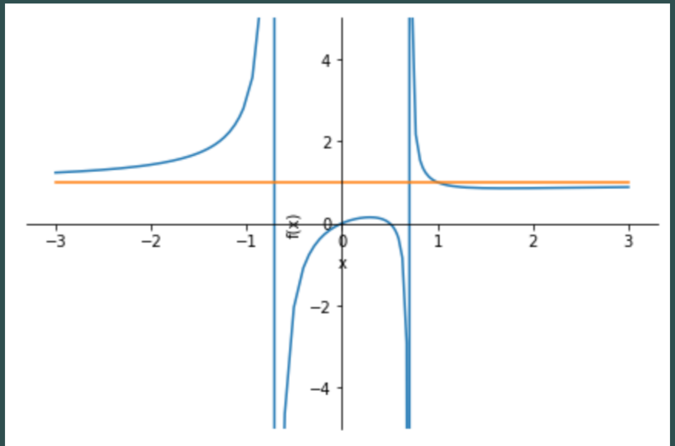
C.1

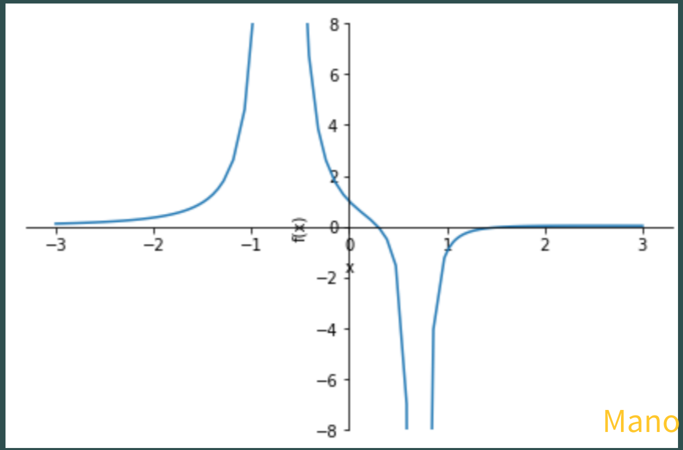


C.1

Caso: $0 < a < 1$







C.2

> Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciare il grafico di Ω_{-1}.

<u>Soluzione</u>

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x+1)}{x^2 + 1}$$

- Dominio: $\mathcal{R}$
- Intersezione con asse y: si ottiene sostituendo $x = 0$ e si ha $(0, 0)$
- Intersezione con asse x: si ottiene risolvendo $x(x+1) = 0$ che da $(0, 0)$ e $(-1, 0)$
- Segno: si ottiene risolvendo $\frac{x(x+1)}{x^2+1} > 0$ i.e. ($x^2 + 1$ sempre positivo), $x(x+1) > 0$ che è $\{x < -1\} \ \cup \ \{x > 0\}$

C.2

$$f_{-1}(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x(x + 1)}{x^2 + 1}$$

- Asintoti verticali: non ce ne sono
- Asintoti orizzontali: già calcolati $y = 1$
- Essendo $a < 0$ (già studiato il caso)
  - Derivata prima $f'_{-1}(x) = a\frac{x^2-2x+a}{(x^2-a)^2}\Big|_{a=-1} = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$
  - Zeri della derivata prima: $-x^2 + 2x + 1 = 0$ i.e. $x = 1 \pm \sqrt{2}$
  - minimo: $x_{\text{min}} = 1 - \sqrt{1-a}\big|_{a=-1} = 1 - \sqrt{2}$ con $y_{\text{min}} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$
  - massimo: $x_{\text{max}} = 1 + \sqrt{1-a}\big|_{a=-1} = 1 + \sqrt{2}$ con $y_{\text{max}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

C.2

Da $f'_{-1}(x) = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$ si ha (uso la derivata del prodotto)

$$\begin{aligned} f''_{-1}(x) &= -(2x-2)\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2} - (x^2-2x-1)\cdot(-2)\cdot\frac{1}{(x^2+1)^3}\cdot 2x \\ &= 2\frac{-(x-1)(x^2+1)+2x(x^2-2x-1)}{(x^2+1)^3} \\ &= 2\frac{x^3-3x^2-3x+1}{(x^2+1)^3} \\ &= 2\frac{(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Dove $x = -1$ è uno zero della derivata prima (polinomio simmetrico dispari)

C.2

Gli zeri della derivata seconda $f''_{-1}(x) = 2\frac{(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$ sono

- $x = -1$
- $x^2 - 4x + 1 = 0 \implies x = 2 \pm \sqrt{3}$

Per lo studio del segno abbiamo

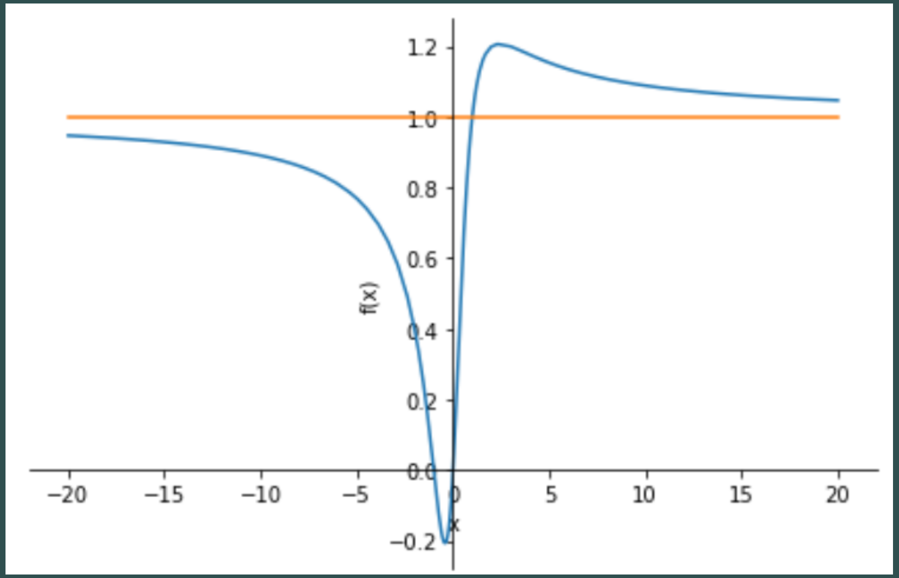
- $x + 1 > 0$ per $x > -1$
- $x^2 - 4x + 1 > 0$ per $\{x < 2 - \sqrt{3}\} \cup \{x > 2 + \sqrt{3}\}$

Quindi

$f''_{-1}(x) > 0$ per $\{-1 < x < 2 - \sqrt{3}\} \cup \{x > 2 + \sqrt{3}\}$

C.2

- Dominio: $\mathcal{R}$
- Asse y: $(0,0)$, Assi x: $(0,0)$ e $(-1,0)$
- $f(x) > 0$ per $\{x < -1\} \ \cup \ \{x > 0\}$
- Asintoti verticali: No
- Asintoti orizzontali: $y = 1$
- $f'_{-1}(x) = 0$ per $x = 1 \pm \sqrt{2}$
- minimo: $x_{\min} = 1 - \sqrt{2}$
- massimo: $x_{\max} = 1 + \sqrt{2}$
- $f''_{-1}(x) = 0$ per $\left\{-1, 2 \pm \sqrt{3}\right\}$



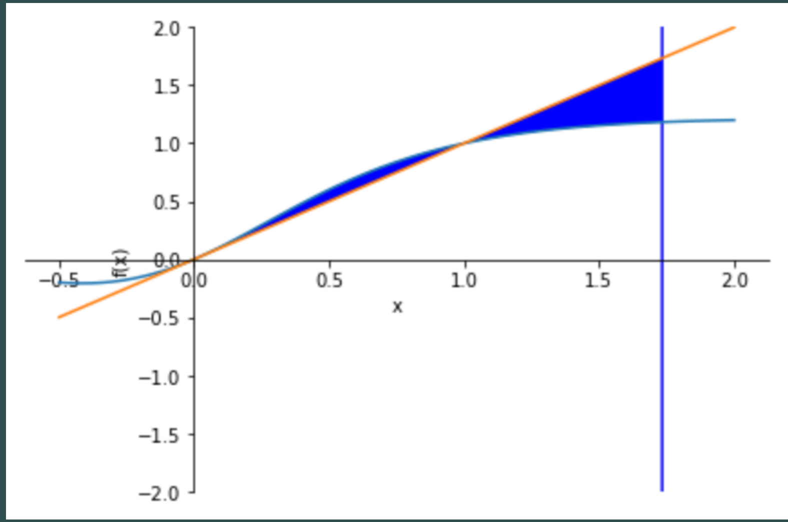
D

> Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico di Ω_{-1}, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$

<u>**Soluzione**</u>

Ricordiamo che l'equazione della retta tangete (già calcolata) è: $y = x$

L'area da calcolare è rappresentata in figura



D

Troviamo il punto di intersezione:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{x(x+1)}{x^2+1} \end{cases} \implies x = 0 \ \cup \ x = 1$$

Quindi $x = 1$ è il punto cercato

- Per $0 < x < 1$ si ha $f_{-1}(x) > x$ (funzione sopra la retta)
- Per $x > 1$ si ha $f_{-1}(x) < x$ (funzione sotto la retta)

D

Calcoliamo una primitiva di

$$
\begin{aligned}
I &= \int \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} - x \right) dx \\
&= \int \left(\frac{(x^2+1)+x-1}{x^2+1} - x \right) dx \\
&= \int \left(1 - x + \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) - \arctan x + C
\end{aligned}
$$

D

<u>Area per</u> $0 < x < 1 \quad , \quad f_{-1}(x) > x$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} - x \right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x + C \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log(2) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

dove

- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
- $\arctan 0 = 0$

D

<u>**Area per**</u> $1 < x < \sqrt{3} \quad , \quad f_{-1}(x) < x$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= -\int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} - x \right) dx \\
&= -\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x + C \right]_1^{\sqrt{3}} \\
&= -\left(\sqrt{3} - \frac{3}{2} + \log(2) - \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log(2) + \frac{\pi}{4} \right) \\
&= -\sqrt{3} + 2 - \frac{1}{2}\log(2) + \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

dove

- $\arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$
- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

D

Area totale

$$A_T = \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\log(2)} - \frac{\pi}{4} + -\sqrt{3} + 2 - \cancel{\frac{1}{2}\log(2)} + \frac{\pi}{12}$$
$$= \frac{5}{2} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)