

Maturità 2023

Problema 1

Manolo Venturin

(con verifica in Python)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

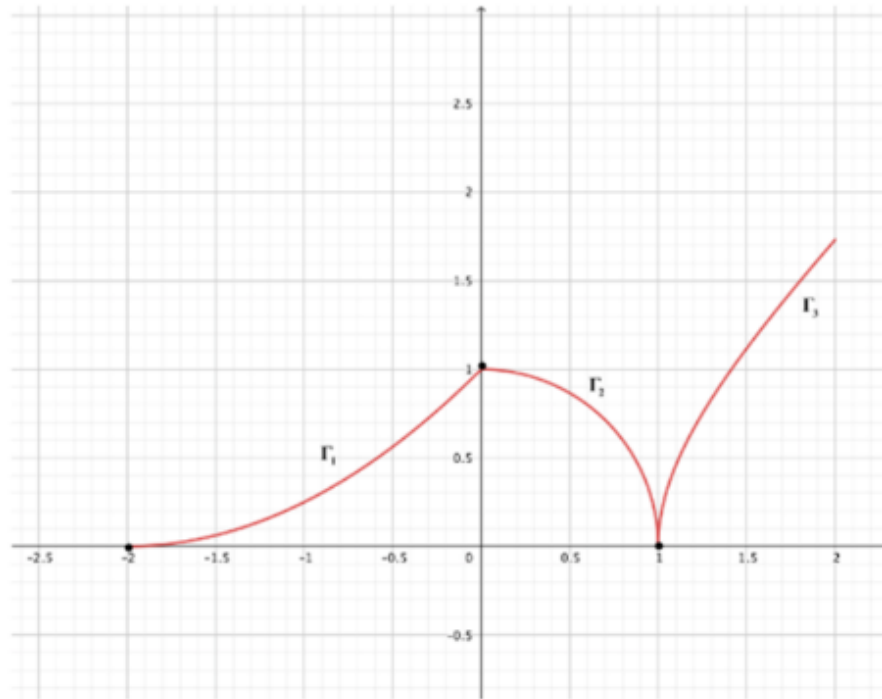
Grazie!



Problema 1

PROBLEMA 1

Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola Γ_1 , dell'arco di circonferenza Γ_2 e dell'arco di iperbole Γ_3 .



- a) Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni:

$$y = a(x + 2)^2 \quad x^2 + y^2 + b = 0 \quad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a , b , c .

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

- b) A partire dal grafico della funzione f , dedurre quello della sua derivata f' e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.
- c) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui Γ_1 è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h . Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.
- d) Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

A.1

Scrivere un'espressione analitica della funzione f definita a tratti nell'intervallo $[-2, 2]$, utilizzando

$$y = a(x + 2)^2 \quad x^2 + y^2 + b = 0 \quad x^2 - y^2 + c = 0$$

e individuare i valori opportuni per i parametri reali a , b e c .

Soluzione

Per trovare i parametri a , b e c dobbiamo imporre le condizioni di passaggio per dei punti noti delle 3 espressioni

A.1

Arco di parabola — tratto $[-2, 0]$

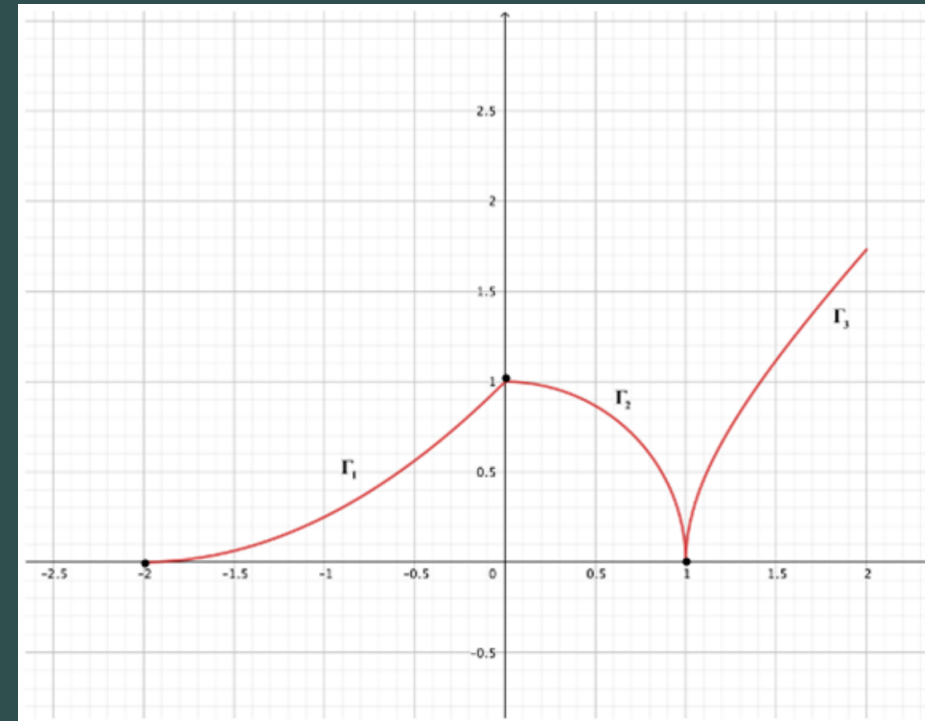
Dal grafico, la parabola passa per i punti

- $(-2, 0)$
- $(0, 1)$

Il punto $(-2, 0)$ non lo possiamo utilizzare perché,

$$\begin{cases} y = a(x + 2)^2 \\ x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \implies 0 = 0$$

infatti è il vertice della parabola



A.1

Arco di parabola — tratto $[-2, 0]$

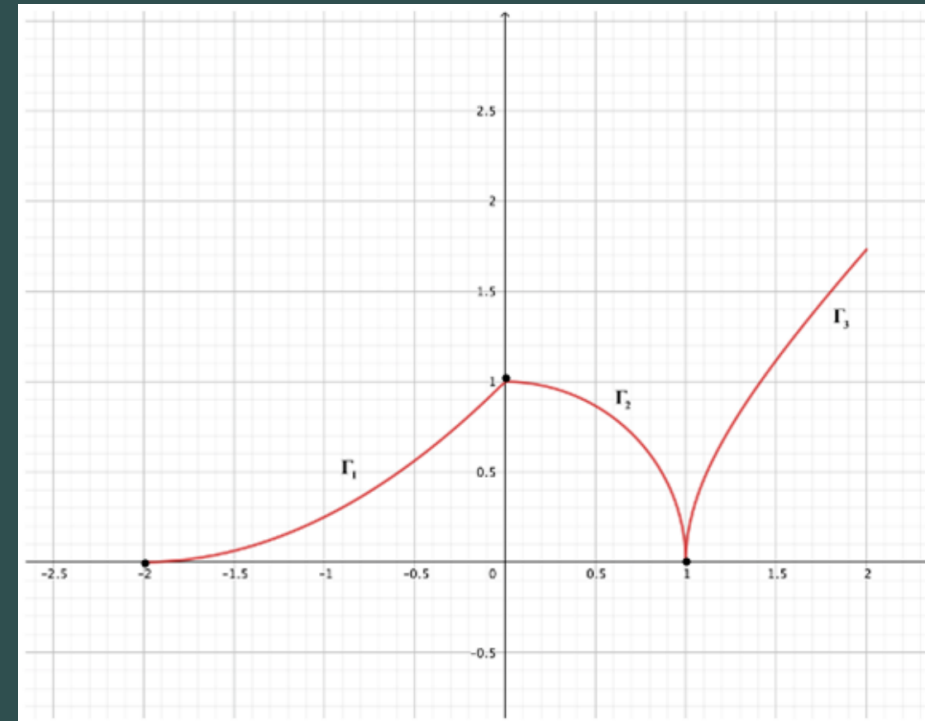
Per $(0, 1)$ si ha

$$\begin{cases} y = a(x + 2)^2 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\implies 1 = 4a \implies a = \frac{1}{4}$$

Quindi l'equazione di Γ_1 diventa

$$y = \frac{1}{4}(x + 2)^2, \quad x \in [-2, 0]$$



A.1

Arco di circonferenza — tratto $(0, 1]$

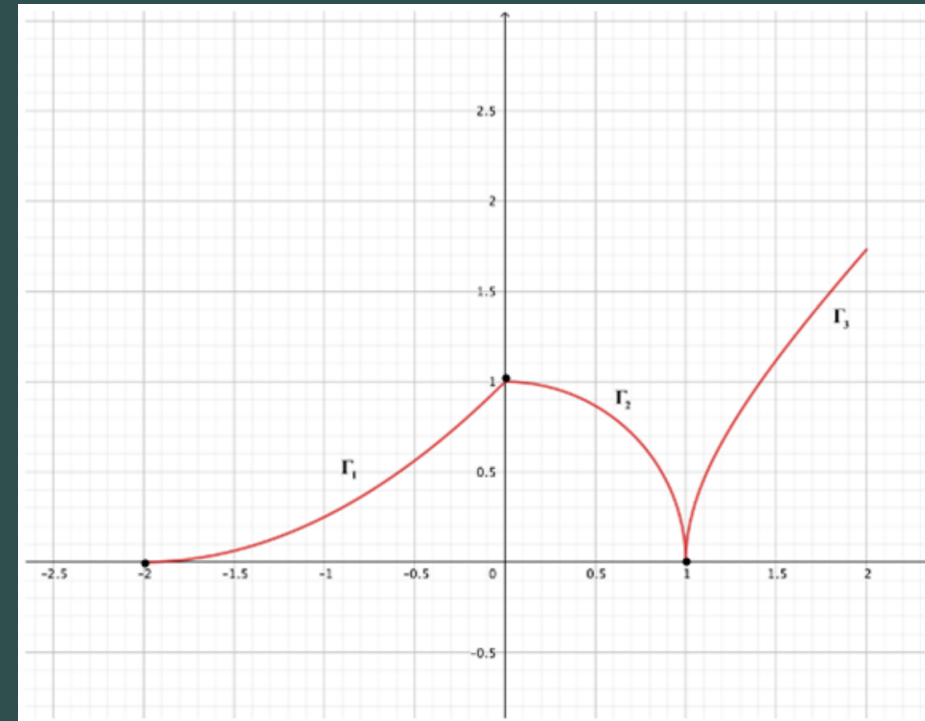
Dal grafico, la circonferenza passa per i punti

- $(0, 1)$
- $(1, 0)$

Per $(0, 1)$ si ha

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + b = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$
$$\implies 0 + 1 + b = 0 \implies b = -1$$

Volendo si poteva utilizzare anche $(1, 0)$



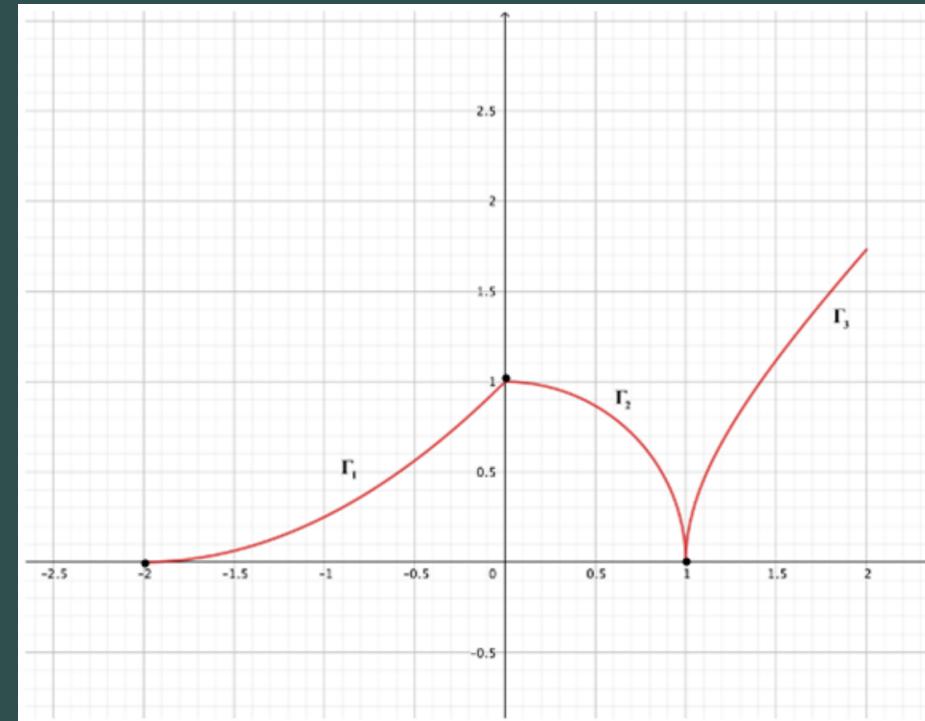
A.1

Arco di circonferenza — tratto $(0, 1]$

Quindi l'equazione della circonferenza diventa

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \implies x^2 + y^2 = 1$$

Si tratta di una circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio $r = 1$



A.1

Arco di circonferenza — tratto $(0, 1]$

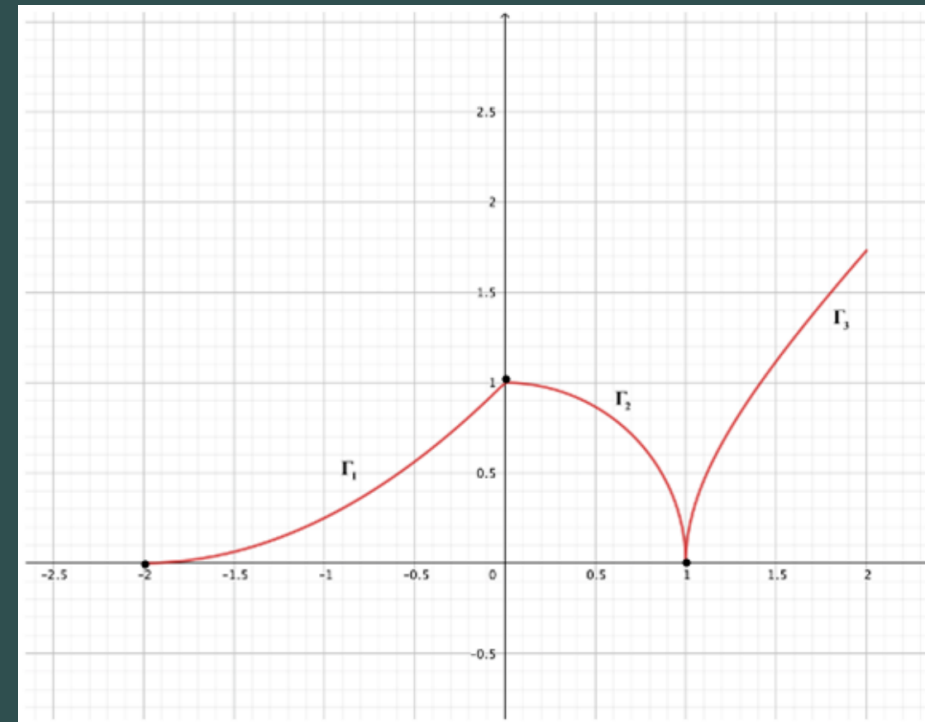
La funzione che identifica Γ_2 è ottenuta esplicitando la y , i.e.

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

dove scegliamo il segno $+$ perché si sviluppa sopra l'asse x , i.e.

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in (0, 1]$$

A riprova di ciò se scegliamo $x = 0$ si ha $y = \sqrt{1 - 0} = 1$ che appartiene al grafico di Γ_2



A.1

Arco di iperbole — tratto $(1, 2]$

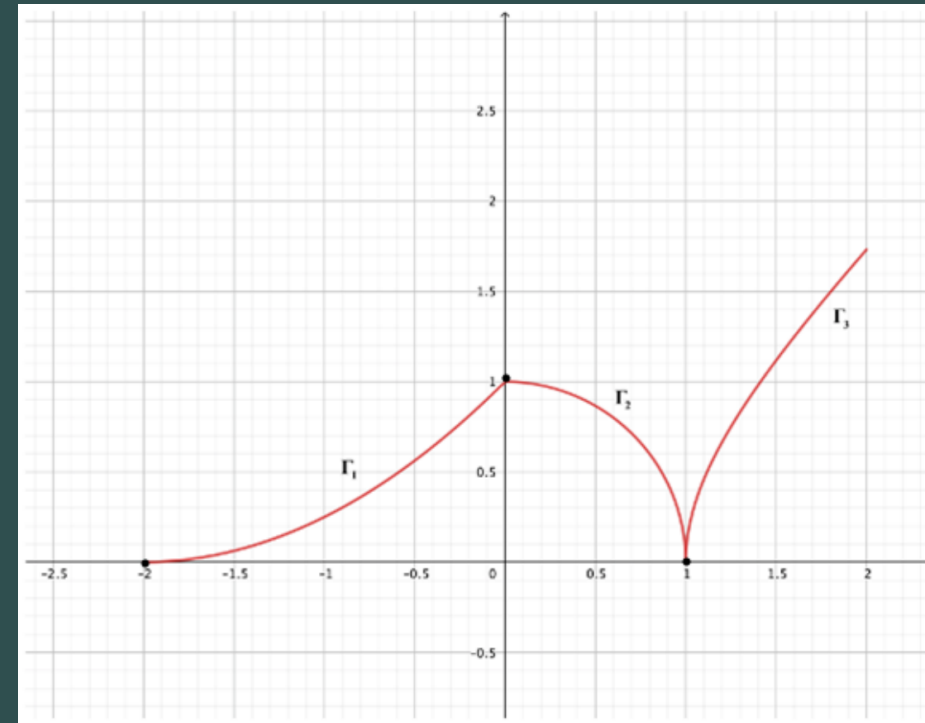
Dal grafico, l'iperbole passa per il punto $(1, 0)$

Per $(1, 0)$ si ha

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + c = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \implies 1 - 0 + c = 0 \implies c = -1$$

Quindi l'equazione dell'iperbole diventa

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \implies x^2 - y^2 = 1$$



A.1

Arco di iperbole — tratto $(1,2]$

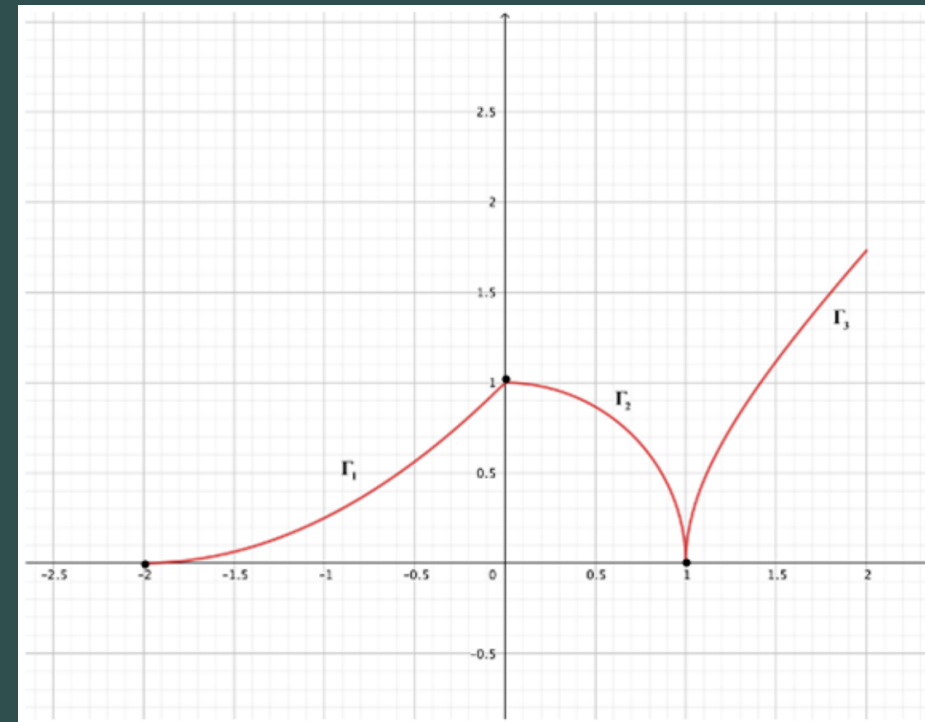
Ora andiamo a scrivere il ramo corrispondente all'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, i.e. esplicitiamo la y

Abbiamo

$$y^2 = x^2 - 1 \implies y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

dove, per Γ_3 scegliamo il segno $+$ perché si sviluppa sopra l'asse delle x

A riprova di ciò se sostituiamo $x = 2$ si ha $y = \sqrt{3} \approx 1.73$ che torna graficamente



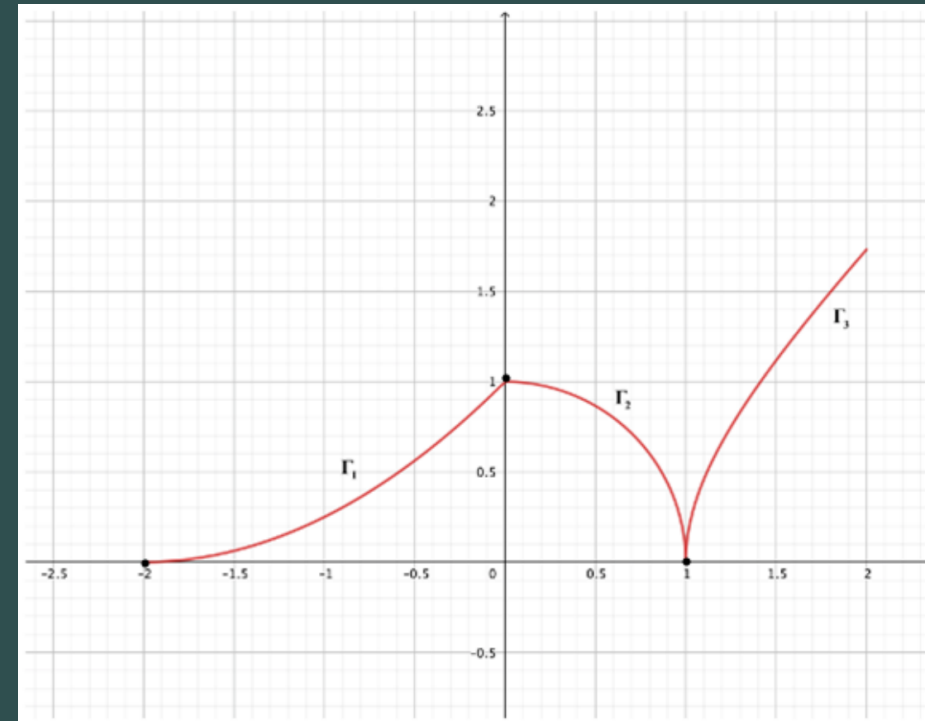
A.1

Funzione

Riassumendo la funzione diventa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & , \quad x \in [-2, 0] \\ \sqrt{1-x^2} & , \quad x \in (0, 1] \\ \sqrt{x^2-1} & , \quad x \in (1, 2] \end{cases}$$

La funzione è continua nei punti di giunzione



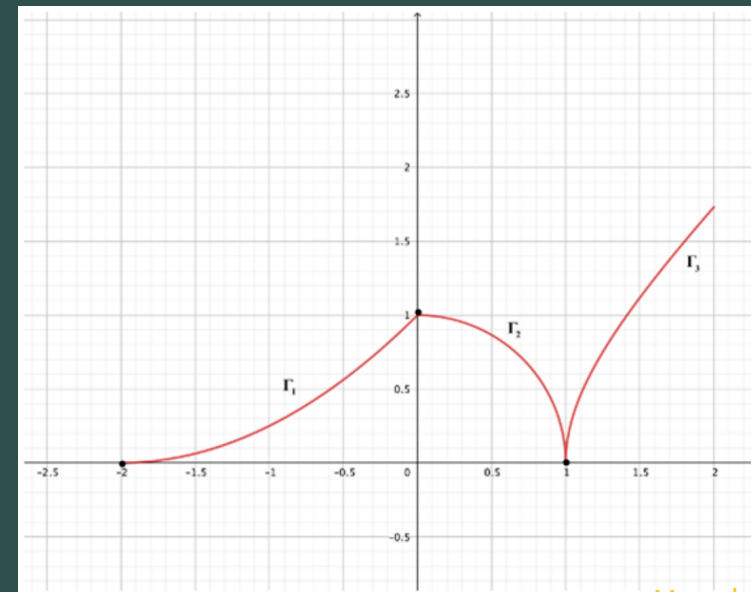
A.2

Studiare la derivabilità della funzione f e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa

$$x = -2 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2$$

Intuitivamente:

- in $x = -2$: tangente (da destra) orizzontale (vertice della parabola)
- in $x = 0$: Punto angolo (non esiste la tangente, eventualmente si può parlare di sub-gradiente)
- in $x = 1$: cerchio e iperbole nel punto con derivata verticale (esiste la tangente)
- in $x = 2$: tangente (da sinistra) con inclinazione positiva



A.2

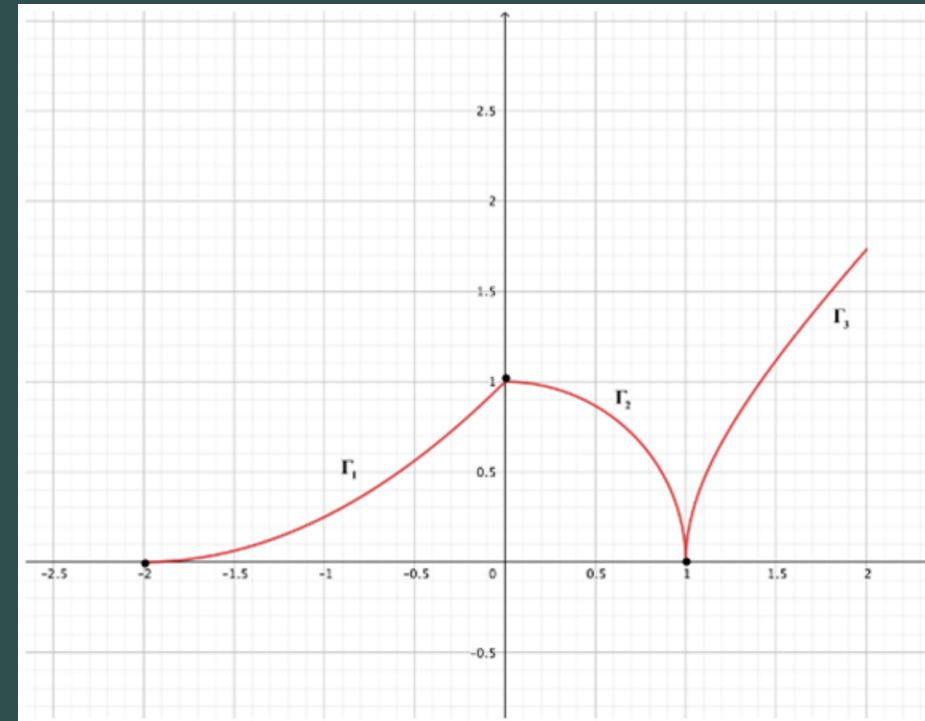
Funzione

La derivata di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^2 & , \quad x \in [-2, 0] \\ \sqrt{1-x^2} & , \quad x \in (0, 1] \\ \sqrt{x^2-1} & , \quad x \in (1, 2] \end{cases}$$

è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & , \quad x \in (-2, 0) \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad x \in (0, 1) \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & , \quad x \in (1, 2) \end{cases}$$



A.2

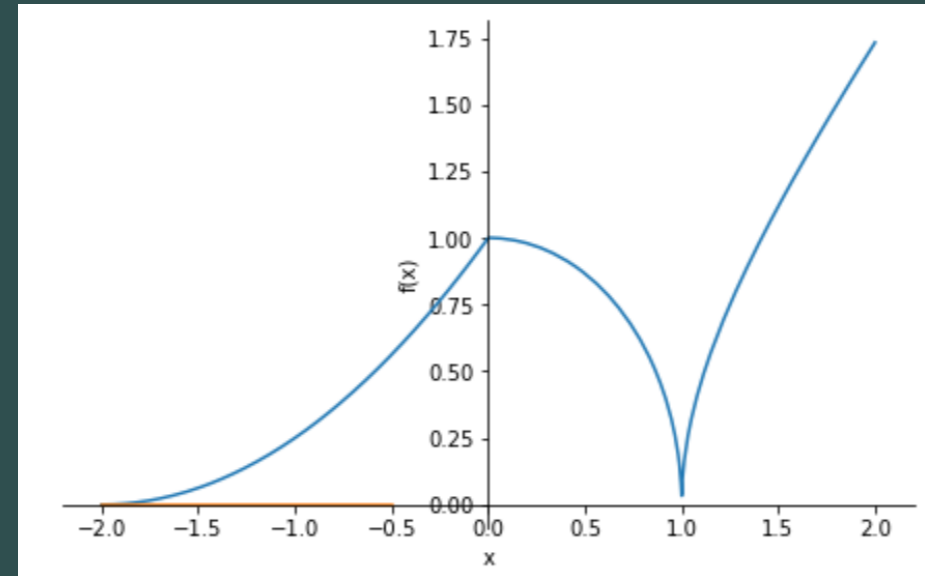
Tangente in $x = -2$

In $x = -2$ possiamo definire la derivata solo da destra (prolungare) con

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{2}(x + 2) = 0$$

e quindi l'equazione della retta tangente diventa

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x_0 = -2 \\ y_0 = 0 \\ m = f'(-2) = 0 \end{cases} \implies y = 0$$



A.2

Tangente in $x = 0$

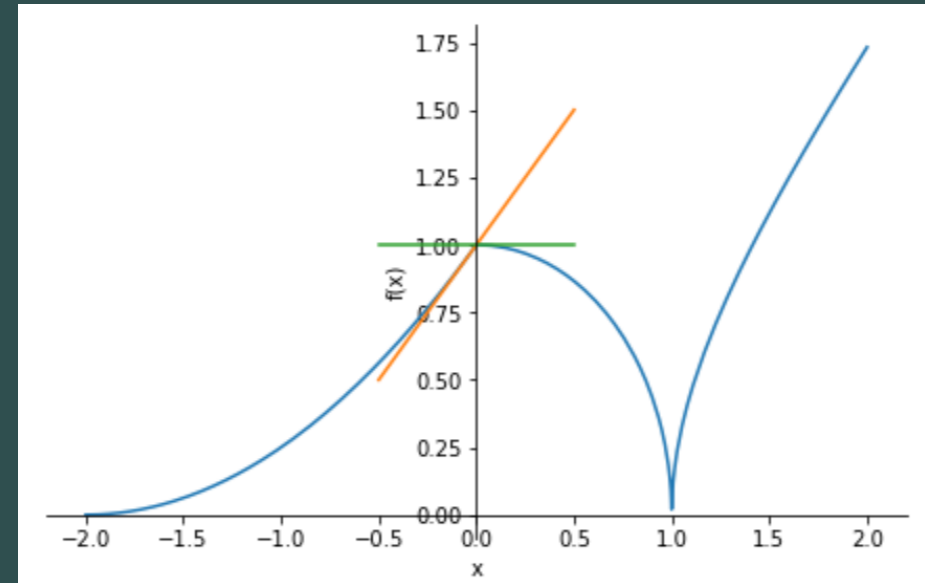
Per $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}(x + 2) = 1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 0$$

- Essendo diversi (sinistro e destro) la funzione non è derivabile
- Essendo entrambi finiti si tratta di un punto angolo (non possiamo definire una retta tangente)



A.2

Tangente in $x = 1$

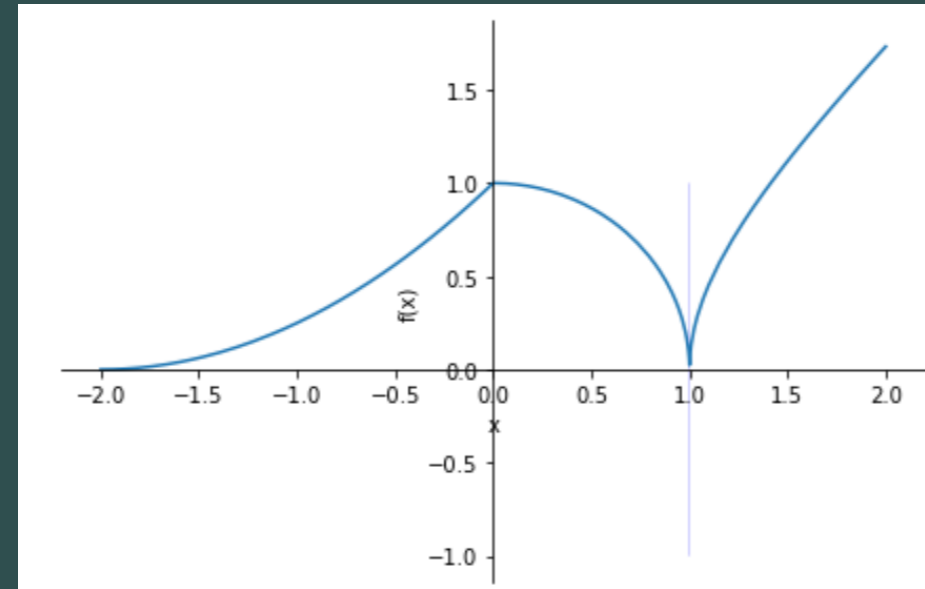
Per $x = 1$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Per le cuspidi, la retta tangente è la retta verticale di equazione $x = 1$



A.2

Tangente in $x = 2$

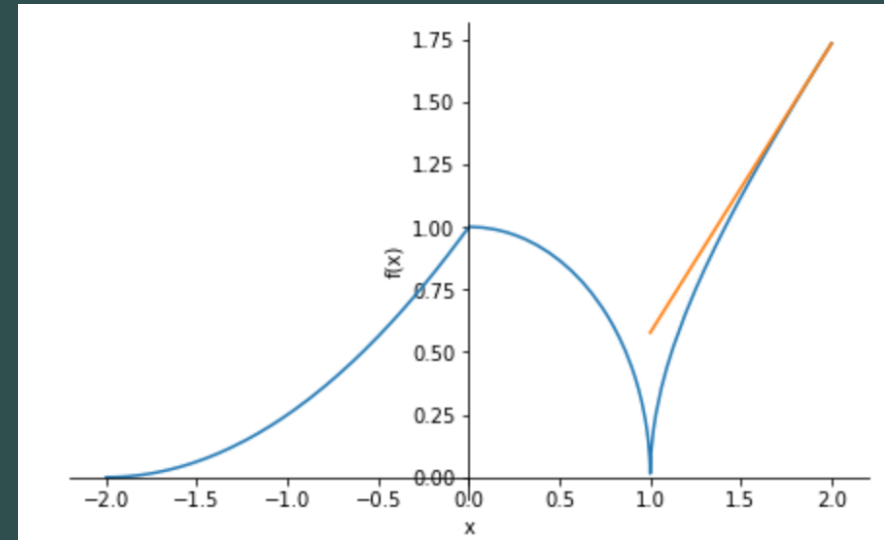
In $x = 2$ possiamo definire la derivata solo da sinistra (prolungare) con

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

e quindi l'equazione della retta tangente diventa

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x_0 = 2 \\ y_0 = \sqrt{x^2 - 1} \Big|_{x=2} = \sqrt{3} \\ m = f'(2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\implies y - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2) \implies y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 2) + \sqrt{3}$$



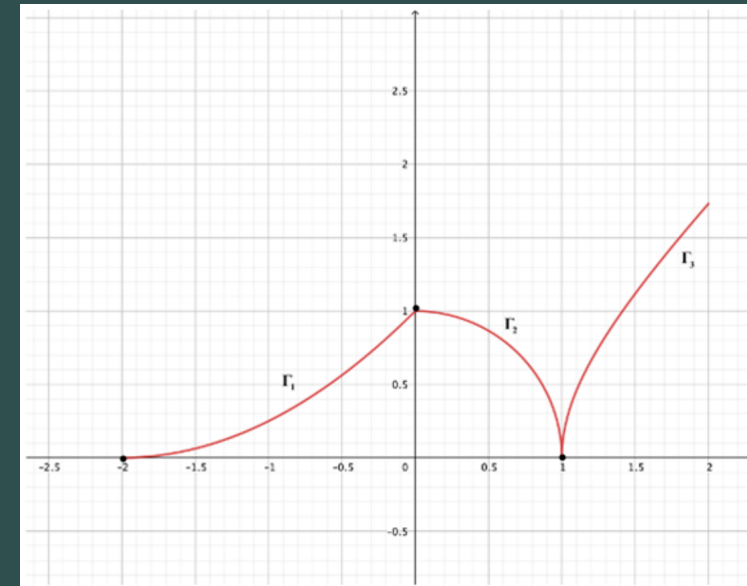
B.1

A partire dal grafico della funzione f , dedurre quello della sua derivata f'

Soluzione

Da considerazioni geometriche e dal grafico di f abbiamo

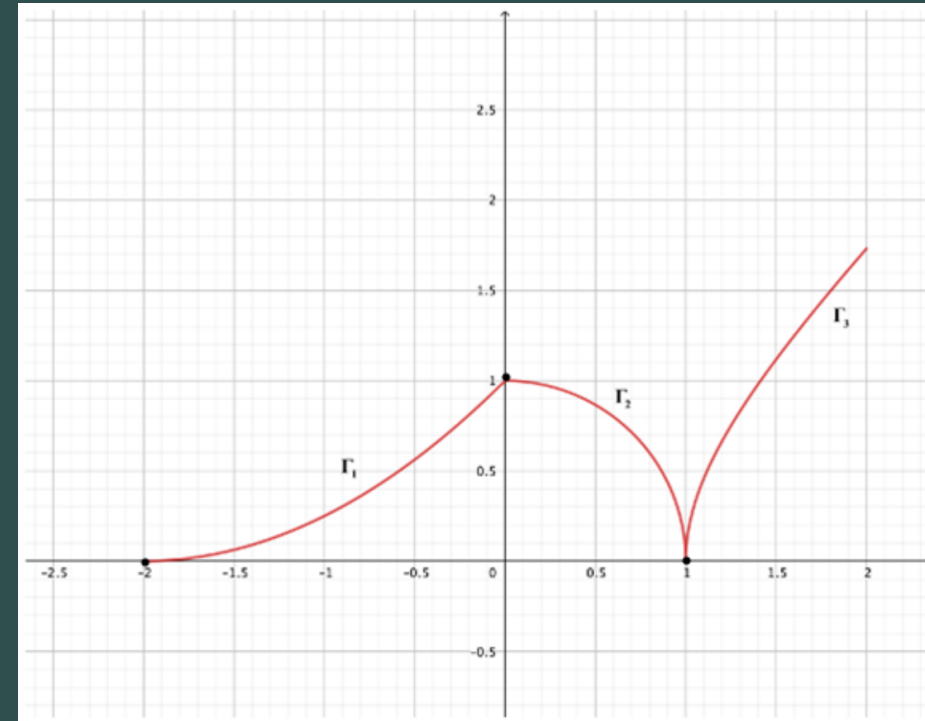
- in $[-2, 0]$ si tratta di un **arco parabola strettamente crescente** con la derivata prima sarà positiva e la derivata seconda positiva
- in $[0, 1]$ si tratta di un **arco di circonferenza strettamente decrescente** con la derivata prima sarà negativa e la derivata seconda negativa
- in $[1, 2]$ si tratta di un **arco di iperbole strettamente crescente** con la derivata prima strettamente positiva e la derivata seconda negativa



B.1

Infatti, la derivata prima

- per $x \in (-2, 0)$ si ha $\frac{1}{2}(x + 2) > 0$
- per $x \in (0, 1)$ si ha $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} < 0$ (la radice è sempre positiva, il numeratore x anche)
- per $x \in (1, 2)$ si ha $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$

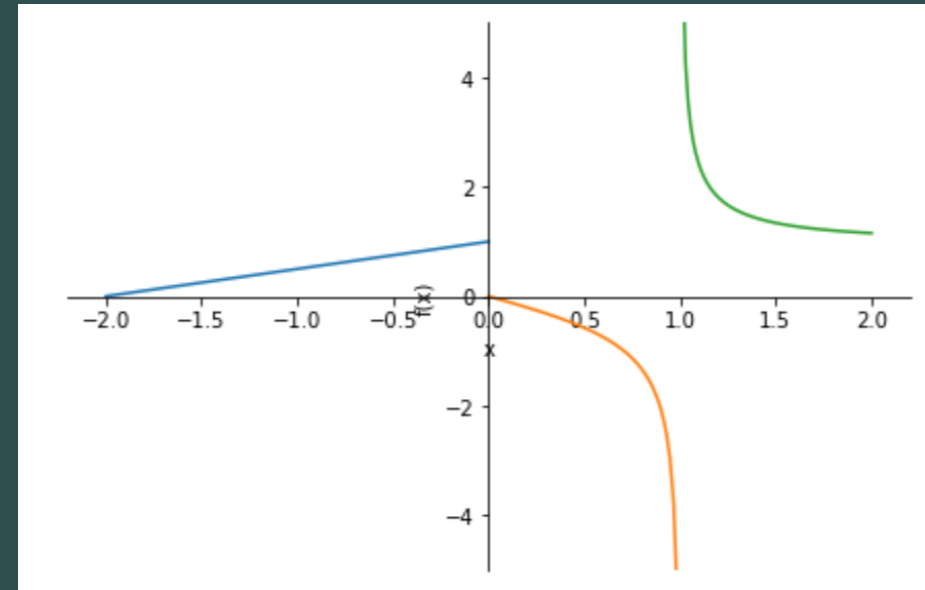


B.1

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2) & , \quad x \in (-2, 0) \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad x \in (0, 1) \\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & , \quad x \in (1, 2) \end{cases}$$

Il grafico della derivata prima è immediato ricordando che

- $f'(-2) = 0$
- $f'(0^-) = 1$
- $f'(0^+) = 0$
- $f'(1^-) = -\infty$
- $f'(1^+) = +\infty$
- $f'(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$



B.2

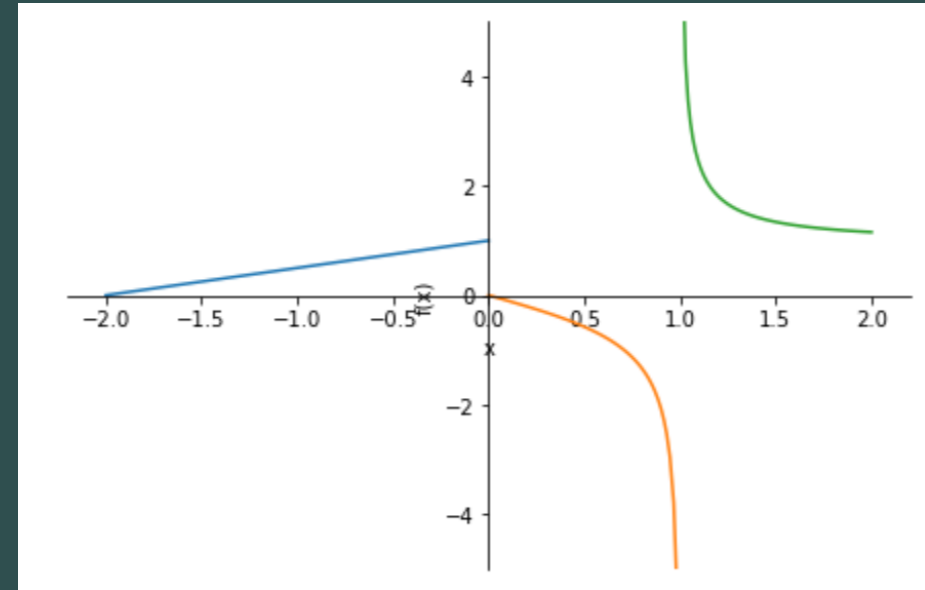
Individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$

Soluzione

Usando il teorema fondamentale del calcolo (con le derivate delle funzioni composte) si ha $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad F''(x) = f'(x)$$

Quindi la concavità/convessità di $F(x)$ corrisponde al segno di $f'(x)$



B.2

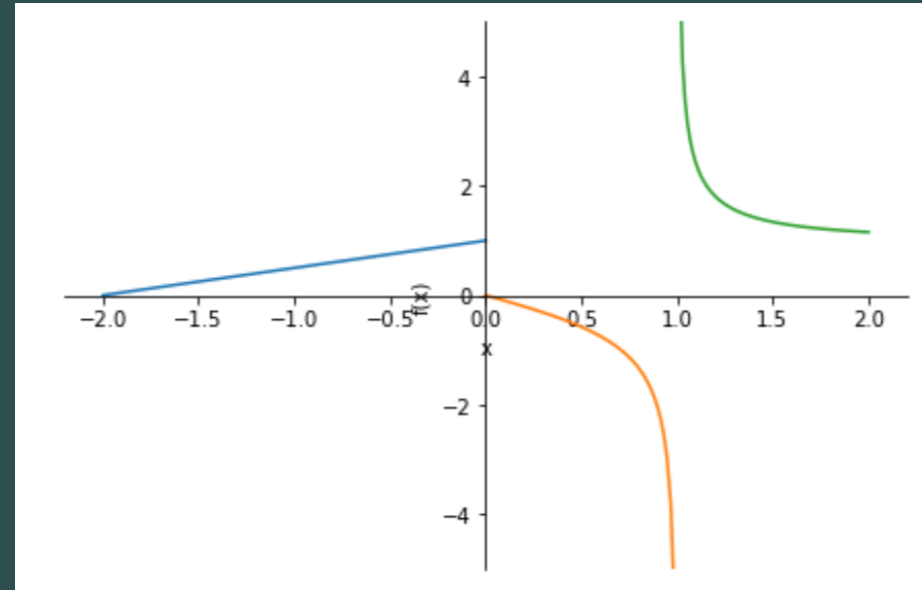
Individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$

Soluzione

$F(x)$ è concava verso l'alto (convessa) dove la $f'(x)$ è positiva e concava verso il basso dove $f'(x) < 0$

Si ha

- $F(x)$ concava verso l'alto in $(-2, 0)$ e $(1, 0)$
- $F(x)$ concava verso il basso in $(0, 1)$

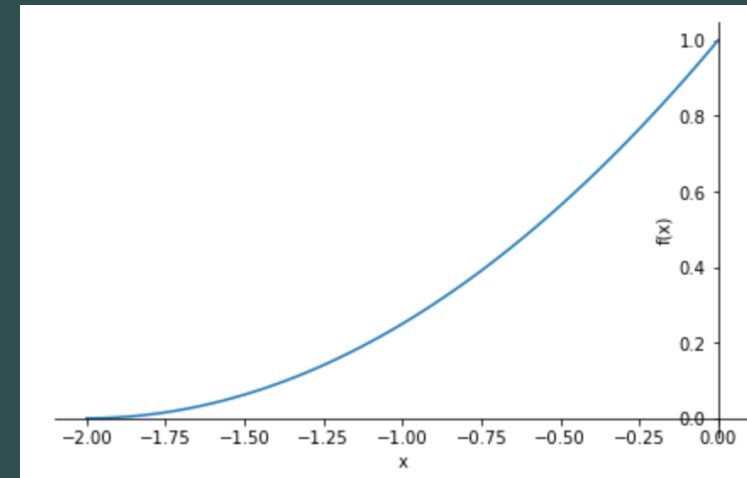


C.1

Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$, definita nell'intervallo $[-2, 0]$ di cui Γ_1 è il suo grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h .

Soluzione

La funzione è monotona crescente (ha la derivata prima maggiore di zero) e quindi è invertibile (teorema)

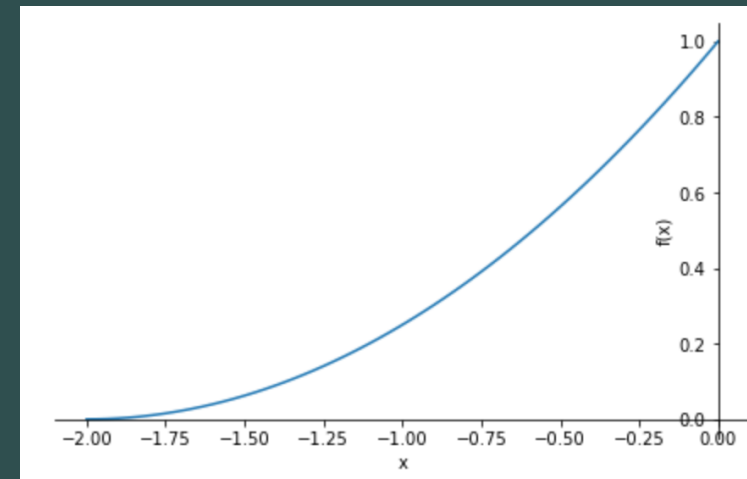


C.1

Ora esplicitiamo la x in funzione della y

Da $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$ si ha

$$(x + 2)^2 = 4y \implies x = \pm 2\sqrt{y} - 2$$



Nello scegliere il segno osserviamo che la $x \in (-2, 0)$ e la $y \in (0, 1)$, e quindi devo scegliere il segno $+$, da cui l'inversa

$$h(x) = 2\sqrt{x} - 2 = 2(\sqrt{x} - 1)$$

C.2

Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

Soluzione

Lo studio della derivabilità dell'inversa può essere affrontato con il teorema di derivazione della funzione inversa che stabilisce che

Data una funzione $y = f(x)$ biunivoca e derivabile in un punto x_0 e supponiamo inoltre che $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$, e la sua derivata in tale punto è

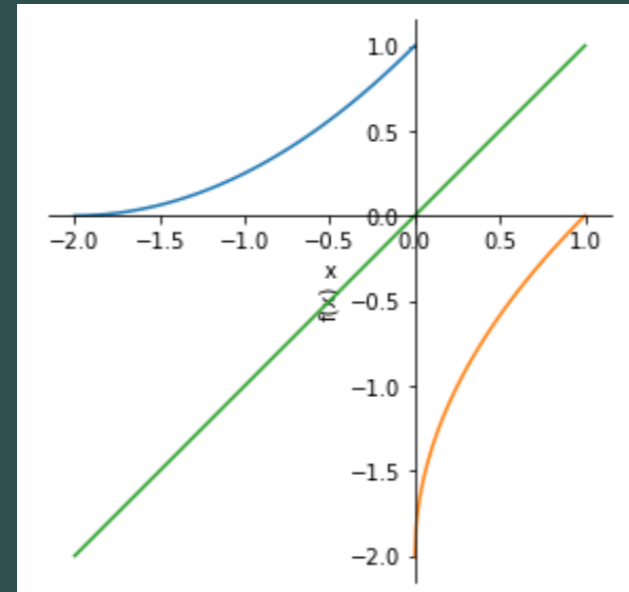
$$(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0) = 1/(f'(f^{-1}(y_0)))$$

C.2

Grazie al teorema precedente, si ha che solo in $x = -2$ dove $f'(x) = 0$ la funzione inversa non sarà derivabile, i.e. non sarà derivabile in $x = 0$

Per disegnare il grafico dell'inversa usiamo la proprietà, di essere simmetrico rispetto alla retta di eq. $y = x$

Il grafico di $2(\sqrt{x} - 1)$ ha per dominio $x = [0, 1]$ (co-dominio della parabola)!



C.2

Comunque il calcolo di $h'(x)$ non è difficile e risulta:

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(2(\sqrt{x} - 1)) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

per $x \in (0, 1)$

Abbiamo un'ulteriore conferma che $x = 0$ non è derivabile

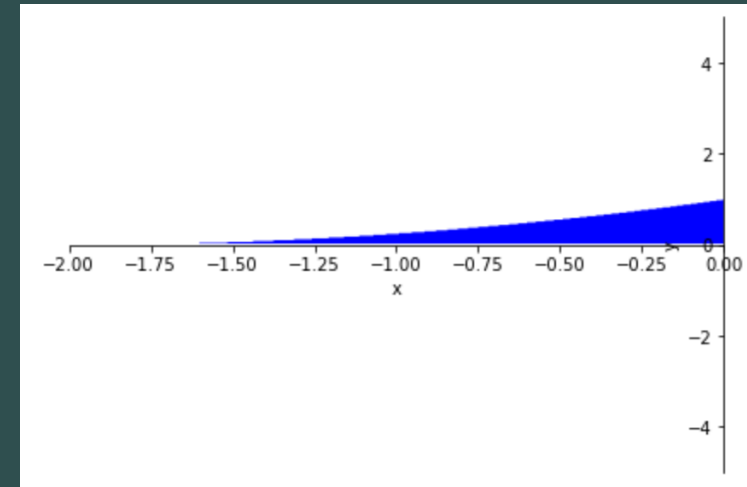
D

Sia S la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico di Γ_1 e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Soluzione

Calcoliamo l'area sottesa da Γ_1 (funzione sempre positiva)

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 \frac{1}{4}(x+2)^2 dx \\ &= \frac{1}{12}(x+2)^3 \Big|_{-2}^0 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



D

Troviamo k tale che

$$\int_{-2}^k \frac{1}{4}(x+2)^2 dx = \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

i.e.

$$\left. \frac{1}{12}(x+2)^3 \right|_{-2}^k = \frac{1}{3} \implies \frac{1}{12}(k+2)^3 = \frac{1}{3} \implies k = \sqrt[3]{4} - 2$$

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE