Disequazioni con i radicali

(Disequazioni notevoli)

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Disequazioni notevoli con la radice
  - Radice pari
  - Radice dispari
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Risolvere

1. $\sqrt{2-x^2} > x$
2. $\sqrt{2x-1} < x$
3. $\sqrt{3-x^2} > \sqrt{3x^2-1}$

Disequazioni notevoli

Le tipologie di disequazioni dipendono dalla forma convenzione utilizzata:

- x reali
- ramo principale

Analizziamo i diversi casi nelle diverse convenzioni.

Primo caso (maggiore o maggiore uguale)

Per semplificare una disequazione della forma

$$\sqrt[n]{P(x)} \geqslant Q(x)$$

dobbiamo

- aggiungere le condizioni di esistenza di $P(x)$
- e il fatto che $Q(x)$ può essere maggiore o uguale a zero

Analizziamo i singoli casi.

Convezione x reale

In questo caso va considerato il fatto se n è pari o dispari.

Se n è **pari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} \geqslant Q(x) \overset{\text{n pari}}{\iff} \begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geqslant 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} Q(x) \geqslant 0 \\ P(x) \geqslant [Q(x)]^n \end{cases}$$

Se n è **pari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \overset{\text{n pari}}{\iff} \begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geqslant 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} Q(x) \geqslant 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n \end{cases}$$

Convezione x reale

Se n è **dispari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} \geqslant Q(x) \quad \overset{\text{n dispari}}{\iff} \quad P(x) \geqslant [Q(x)]^n$$

Se n è **dispari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \quad \overset{\text{n dispari}}{\iff} \quad P(x) > [Q(x)]^n$$

Convezione ramo principale

Nella convenzione del ramo principale bisogna aggiungere sempre la condizione di esistenza positiva o zero alla radice. Quindi le disequazioni sono trattate come il caso n pari della convezione dei reali.

Si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} \geqslant Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geqslant 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} Q(x) \geqslant 0 \\ P(x) \geqslant 0 \\ P(x) \geqslant [Q(x)]^n \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} Q(x) < 0 \\ P(x) \geqslant 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} Q(x) \geqslant 0 \\ P(x) \geqslant 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n \end{cases}$$

Secondo caso (minore o minore uguale)

Per semplificare una disequazione della forma

$$\sqrt[n]{P(x)} \leqslant Q(x)$$

dobbiamo aggiungere le condizioni di esistenza di $P(x)$ e il fatto che $Q(x)$ è minore o uguale a zero.

Analizziamo i singoli casi.

Convezione x reale

In questo caso va considerato il fatto se n è pari o dispari.

Se n è **pari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} \leqslant Q(x) \quad \overset{\text{n pari}}{\iff} \quad \begin{cases} P(x) \leqslant [Q(x)]^n \\ P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Se n è **pari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \quad \overset{\text{n pari}}{\iff} \quad \begin{cases} P(x) < [Q(x)]^n \\ P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$$

Convezione x reale

Se n è **dispari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} \leqslant Q(x) \overset{\text{n dispari}}{\iff} P(x) \leqslant [Q(x)]^n$$

Se n è **dispari** si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \overset{\text{n dispari}}{\iff} P(x) < [Q(x)]^n$$

Convezione ramo principale

Nella convenzione del ramo principale bisogna aggiungere sempre la condizione di esistenza positiva o zero alla radice. Quindi le disequazioni sono trattate come il caso n pari della convezione dei reali.

Si ha

$$\sqrt[n]{P(x)} \leqslant Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \leqslant [Q(x)]^n \\ P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) < [Q(x)]^n \\ P(x) \geqslant 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases}$$

Esempi

Esempio 1

Risolvere

$$\sqrt{2-x^2} > x$$

Soluzione

In questo caso non abbiamo il problema della convenzione (radice pari)

Esempio 1

$$\sqrt{2-x^2} > x$$

Riscrittura della disequazione

La disequazione corrisponde ai sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2 - x^2 > x^2 \end{cases}$$

Esempio 1

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Soluzione del primo sistema

La disequazione $x < 0$ ha soluzione

$$\{x < 0\}$$

La disequazione $2 - x^2 \geqslant 0 \implies -x^2 \geqslant -2 \implies x^2 \leqslant 2$ ha soluzione

$$\{-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\}$$

Intersecando le due soluzione si ottiene

$$\mathbb{S}_1 = \{-\sqrt{2} \leqslant x < 0\}$$

Esempio 1

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2 - x^2 > x^2 \end{cases}$$

Soluzione del secondo sistema

La disequazione $x \geqslant 0$ ha soluzione

$$\{x \geqslant 0\}$$

La disequazione $2 - x^2 > x^2 \quad \Longrightarrow \quad -2x^2 > -2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 < 1$ ha soluzione

$$\{-1 < x < 1\}$$

Intersecando le due soluzione si ottiene

$$\mathbb{S}_2 = \{0 \leqslant x < 1\}$$

Esempio 1

$$\begin{cases} x < 0 \\ 2 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2 - x^2 > x^2 \end{cases}$$

Soluzione finale

Unendo le due soluzioni

- $\mathbb{S}_1 = \{-\sqrt{2} \leqslant x < 0\}$
- $\mathbb{S}_2 = \{0 \leqslant x < 1\}$

si ottiene

$$\mathbb{S} = \{-\sqrt{2} \leqslant x < 1\}$$

Esempio 2

> Risolvere
>
> $$\sqrt{2x-1} < x$$

Soluzione: Riscrittura della disequazione

La disequazione corrisponde al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 2x-1 < x^2 \\ 2x-1 \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Esempio 2

$$\begin{cases} 2x - 1 < x^2 \\ 2x - 1 \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione $2x - 1 < x^2 \implies x^2 - 2x + 1 > 0 \implies (x-1)^2 > 0$ ha soluzione

$$\mathbb{R} \setminus \{1\}$$

La seconda disequazione $2x - 1 \geqslant 0 \implies x \geqslant \frac{1}{2}$ ha soluzione

$$\left\{x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$$

La terza disequazione $x > 0$ ha soluzione

$$\{x > 0\}$$

Esempio 2

$$\begin{cases} 2x-1 < x^2 \\ 2x-1 \geqslant 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Intersecando le tre soluzioni

- $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\{x \geqslant \frac{1}{2}\}$
- $\{x > 0\}$

si ha la soluzione

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2} \leqslant x < 1\right\} \vee \{x > 1\}$$

Esempio 3

Risolvere

$$\sqrt{3-x^2} > \sqrt{3x^2-1}$$

Soluzione

La disequazione è equivalente al seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3-x^2 \geqslant 0 \\ 3x^2-1 \geqslant 0 \\ 3-x^2 > 3x^2-1 \end{cases}$$

Esempio 3

$$\begin{cases} 3 - x^2 \geqslant 0 \\ 3x^2 - 1 \geqslant 0 \\ 3 - x^2 > 3x^2 - 1 \end{cases}$$

La disequazione $3 - x^2 \geqslant 0$ ha soluzione

$$\{-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\}$$

La disequazione $3x^2 - 1 \geqslant 0$ ha soluzione

$$\left\{x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \vee \left\{x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

La disequazione $3 - x^2 > 3x^2 - 1 \implies -4x^2 + 4 > 0 \implies x^2 - 1 < 0$ ha soluzione

$$\{-1 < x < 1\}$$

Esempio 3

La soluzione finale si ottiene intersecando le soluzioni

- $\{-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}\}$
- $\left\{x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \vee \left\{x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$
- $\{-1 < x < 1\}$

ottenendo

$$\left\{-1 < x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x < 1\right\}$$

FINE