Radici
(condizioni di esistenza)

(Disequazioni notevoli)

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Condizioni di esistenza della radice
- Disequazioni con la radice
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Trovare la condizione di esistenza di

1. $\sqrt{1-x^2}$ e di $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\sqrt{-2x^2+3x+5}$, $\sqrt{|-2x^2+3x+5|}$, $\frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+5}}$ e $\frac{1}{\sqrt{|-2x^2+3x+5|}}$
3. $\sqrt{x^3-4x^2+3x}$
4. $\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$
5. $\sqrt[3]{\frac{x+2}{7-x}}$ (nelle due convenzioni)
6. $(x+1)^2 \leqslant (x-1)^2$

Radicali: Condizioni di esistenza

Dobbiamo distinguere due casi: le radici di ordine pari e le radici di ordine dispari.

Radice pari

Per le radici di ordine pari del tipo

$$\sqrt[2n]{P(x)},\ n \in \mathbb{N}$$

la condizione di esistenza è $P(x) \geqslant 0$, con $P(x)$ una qualunque funzione (per ora un polinomio)

Radicali: Condizioni di esistenza

Radici dispari

Qual è il dominio di $\sqrt[3]{x}$?

Per la radici di ordine dispari (es. cubica) si hanno le seguenti convenzioni:

- se si assume di lavorare solo con valori reali, allora il dominio è $\mathbb{R}$;
- se si assume la convenzione della **radice principale** (coinvolgendo i numeri complessi, che introdurremo più avanti), allora il dominio è $\mathbb{R}^+ = [0, \ +\infty)$.

Questo ultimo risultato è legato alla scrittura: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3} \ln x}$ (che vedremo in seguito)

Qui viene adottata la convenzione della radice principale (molti prof. utilizzano la prima convezione facendo la distinzione tra radici pari e radici dispari). Per rendersi conto dell'importanza della convenzione della radice principale: provate a disegnare con un programma di calcolo simbolico o numerico la funzione $\sqrt[3]{x}$ e capirete subito perché uso la seconda convenzione. Oppure chiedere di calcolare $\sqrt[3]{-27}$ o $\sqrt[3]{-\pi}$ e vedete cosa vi restituiscono.

Riassunto

Con la convezione della **radice principale** il dominio di

$$\sqrt[n]{P(x)}$$

è sempre

$$P(x) \geqslant 0$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$

Radice a denominatore

Se la radice compare a denominatore, i.e. si ha la forma

$$\frac{1}{\sqrt[n]{P(x)}}$$

allora bisogna escludere il caso in cui $P(x) = 0$, i.e. diventa

$$P(x) > 0$$

Esempi

Esempio 1

Trovare la condizione di esistenza di

$$\sqrt{1-x^2}$$

e di

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Esempio 1

Soluzione 1

Per le condizioni di esistenza di

$$\sqrt{1-x^2}$$

dobbiamo imporre la condizione

$$1-x^2 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \leqslant 1$$

che ha soluzione

$$-1 \leqslant x \leqslant 1$$

Esempio 1

Soluzione 2

Le condizioni di esistenza di

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

sono

$$1-x^2>0$$

dove lo zero viene escluso

Quindi sono

$$-1<x<1$$

Esempio 2

Trovare la condizione di esistenza di

1. $\sqrt{-2x^2+3x+5}$
2. $\sqrt{|-2x^2+3x+5|}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+5}}$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{|-2x^2+3x+5|}}$

Esempio 2

$$\sqrt{-2x^2+3x+5}$$

Soluzione 1

La condizione di esistenza è:

$$-2x^2+3x+5 \geqslant 0$$

Gli zeri di $-2x^2+3x+5 \geqslant 0$ sono:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{-4} = \frac{-3 \pm 7}{-4} = \left\{-1,\ \frac{5}{2}\right\}$$

Essendo $a < 0$ la disequazione è positiva per valori interni, i.e.

$$\mathcal{S} = \left\{-1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\} \quad \text{i.e.} \quad \left[-1,\ \frac{5}{2}\right]$$

Esempio 2

$$\sqrt{|-2x^2+3x+5|}$$

Soluzione 2

Non ci sono limitazioni alla funzione

$$\sqrt{|-2x^2+3x+5|}$$

e quindi la condizione di esistenza è

$$\mathbb{R}$$

Infatti il valore assoluto produce sempre una risultato positivo

Esempio 2

$$\frac{1}{\sqrt{-2x^2+3x+5}}$$

Soluzione 3

La condizione di esistenza è

$$-2x^2+3x+5>0$$

Partendo dalla soluzione del punto 1, escludiamo gli zeri quindi si ha

$$\mathcal{S}=\left\{-1<x<\frac{5}{2}\right\}$$

Esempio 2

$$\frac{1}{\sqrt{|-2x^2+3x+5|}}$$

Soluzione 4

Le uniche limitazione alla funzione

$$\frac{1}{\sqrt{|-2x^2+3x+5|}}$$

sono gli zeri del denominatore (in quanto il valore assoluto produce sempre un risultato positivo)

Quindi, la soluzione è

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$$

Esempio 3

> Trovare la condizione di esistenza di
>
> $$\sqrt{x^3 - 4x^2 + 3x}$$

Soluzione

La condizione di esistenza è

$$x^3 - 4x^2 + 3x \geqslant 0$$

La disequazione può essere fattorizzata in

$$x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3)$$

da cui applico la regola dei segni

Esempio 3

$$x(x^2 - 4x + 3) \geqslant 0$$

Segno di x: $x \geqslant 0$

Per il segno di $x^2 - 4x + 3$, calcolo gli zeri che sono

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \{3,\ 1\}$$

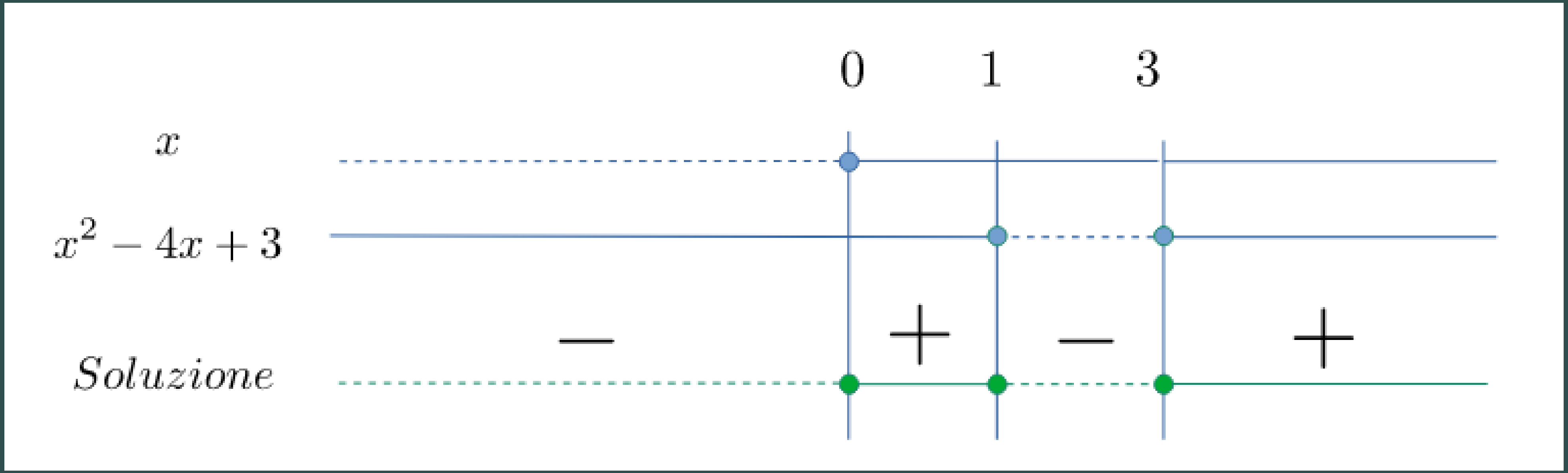
Essendo $a > 0$ la disequazione è positiva per valori esterni, i..e

$$x^2 - 4x + 3 \geqslant 0 \implies \{x \leqslant 1\} \vee \{x \geqslant 3\}$$

Esempio 3

$$x(x^2 - 4x + 3) \geqslant 0$$

Il segno del prodotto è riportato nell'immagine



Dal momento che si devono scegliere i valori positivi, la soluzione è:

$$\mathcal{S} = \{0 \leqslant x \leqslant 1\} \ \vee \ \{x \geqslant 3\} \text{ i.e. } [0,\ 1] \cup [3,\ +\infty)$$

Esempio 4

> Trovare la condizione di esistenza di
>
> $$\sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$$

Soluzione

Dobbiamo risolvere la disequazione

$$\frac{x^3-1}{x} \geqslant 0$$

applicando la regola dei segni

Esempio 4

$$\frac{x^3-1}{x} \geqslant 0$$

Segno del numeratore

Il numeratore si fattorizza come

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

dove si ha

- $x-1 \geqslant 0 \implies x \geqslant 1$
- x^2+x+1 è sempre positivo ($\Delta < 0$)

Quindi il segno del denominatore è quello di $x-1$

Esempio 4

$$\frac{x^3 - 1}{x} \geqslant 0$$

Segno del denominatore

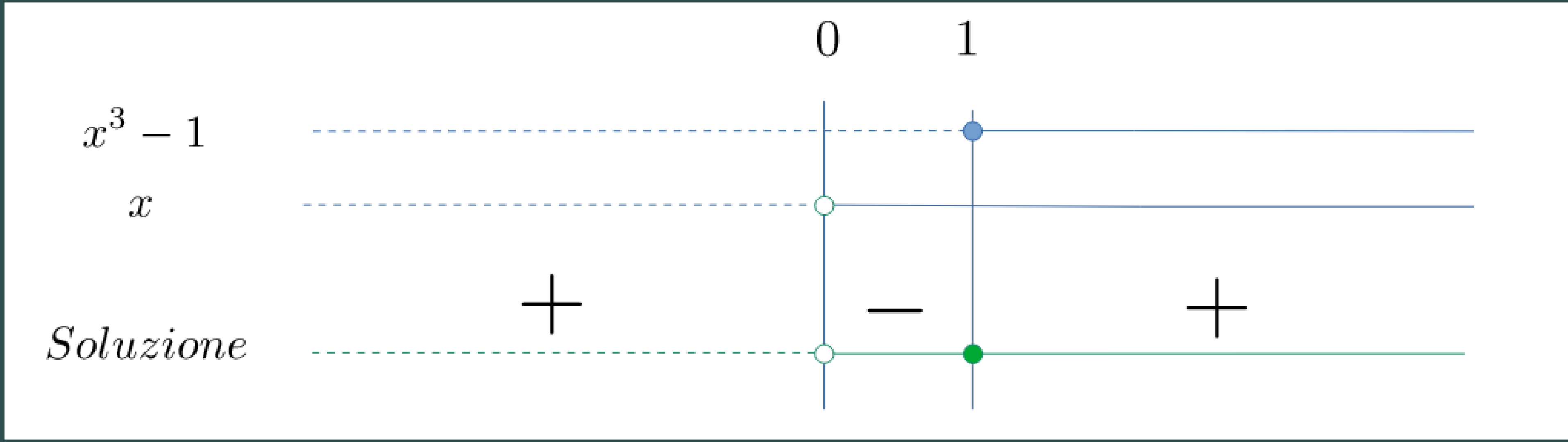
Dal denominatore dobbiamo escludere lo zero, i.e. si ha

$$x > 0$$

Esempio 4

$$\frac{x^3-1}{x} \geqslant 0$$

Segno della frazione e soluzione



Vanno selezionati gli intervalli in cui è positiva o uguale a zero, quindi la soluzione è

$$\{x<0\} \vee \{x \geqslant 1\} \text{ i.e. } (-\infty,\ 0) \cup [1,\ +\infty)$$

Esempio 5

> Trovare la condizione di esistenza di
>
> $$\sqrt[3]{\frac{x+2}{7-x}}$$
>
> nelle due convenzioni

Soluzione: convenzione dei reali

In questo caso la radice è di indice dispari quindi la condizione di esistenza è

$$\mathbb{R} \setminus \{7\}$$

Esempio 5

$$\sqrt[3]{\frac{x+2}{7-x}}$$

Soluzione: convenzione del ramo principale

Con la convenzione del ramo principale, tutte le radici devono avere argomento positivo o uguale a zero, i.e.

$$\frac{x+2}{7-x} \geqslant 0$$

e quindi applico lo studio dei segni

Esempio 5

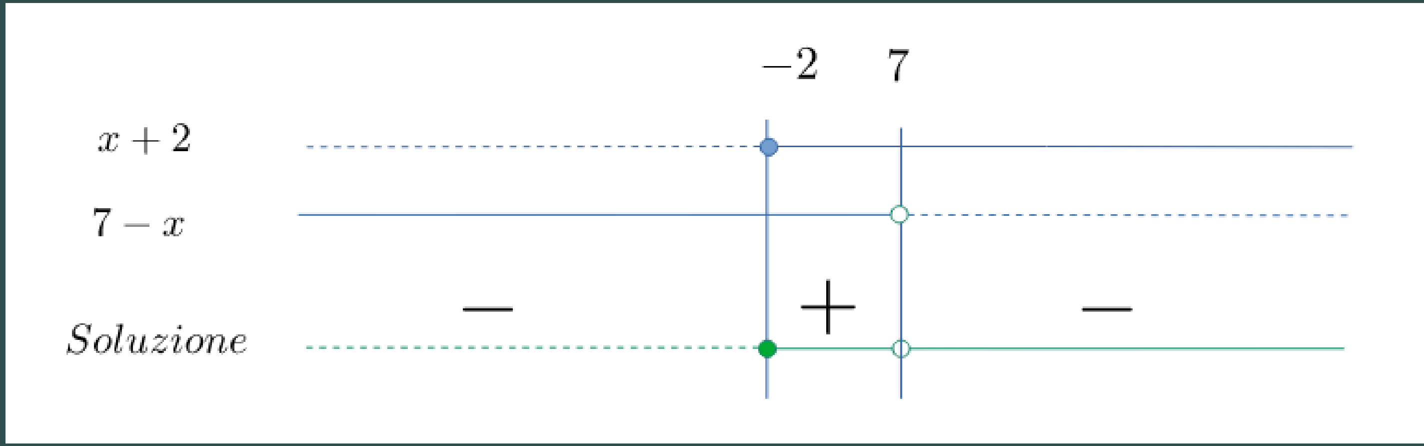
$$\frac{x+2}{7-x} \geqslant 0$$

Numeratore:

$$x + 2 \geqslant 0 \implies x \geqslant -2$$

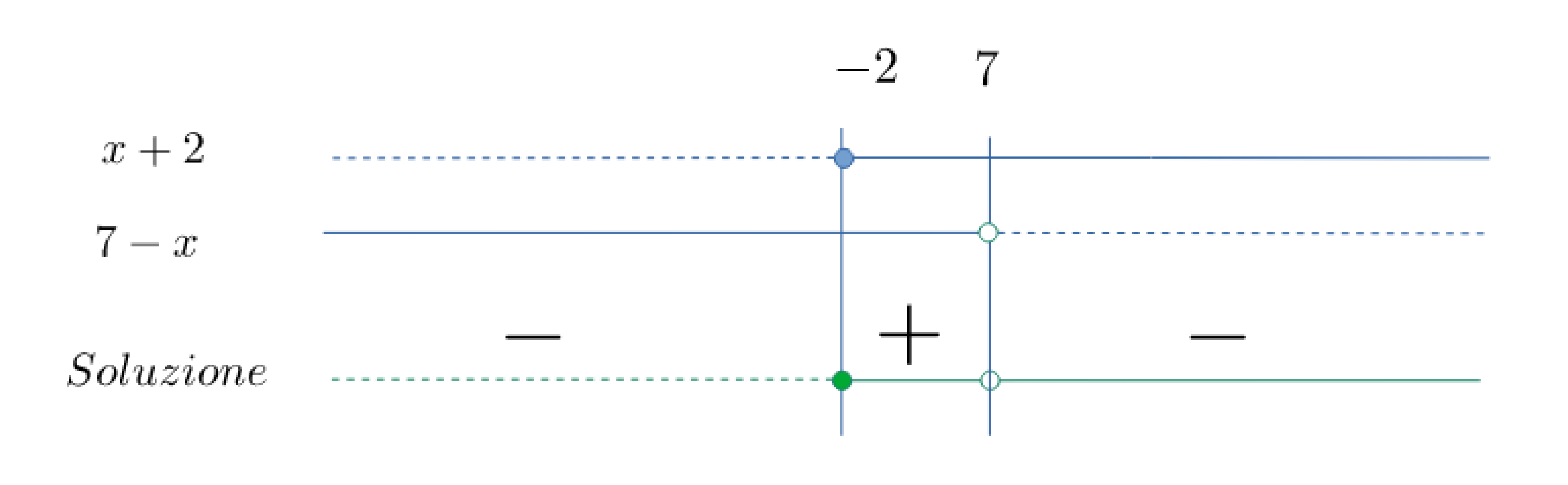
Denominatore: $7 - x > 0 \implies -x > -7 \implies x < 7$

Il segno della frazione è riportato in figura.



Esempio 5

$$\frac{x+2}{7-x} \geqslant 0$$



Viene richiesto di trovare tutti quei intervalli che danno come risultato un numero maggiore o uguale a 0, quindi

$$\mathcal{S} = \{-2 \leqslant x < 7\} \text{ i.e. } [-2,\ 7)$$

Esempio 6

> Trovare la condizione di esistenza di
>
> $$(x+1)^2 \leqslant (x-1)^2$$

Soluzione

Ricordiamo che

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Esempio 6

$$(x+1)^2 \leqslant (x-1)^2$$

Applicando la radice ambo i membri, ricordando che la radice quadrata è una funzione strettamente crescente, si ha

$$\sqrt{(x+1)^2} \leqslant \sqrt{(x-1)^2} \quad \Longrightarrow \quad |x+1| \leqslant |x-1|$$

Per esplicitare i moduli dobbiamo distringuere i seguenti casi

1. $x \geqslant 1$
2. $-1 < x < 1$
3. $x \leqslant -1$

Esempio 6

$$|x+1| \leqslant |x-1|$$

Caso: 1

Se $x \geqslant 1$ allora si ha

$$|x+1| \leqslant |x-1| \quad \Longrightarrow \quad x+1 \leqslant x-1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \leqslant -1$$

che non ha soluzione

Esempio 6

$$|x+1| \leqslant |x-1|$$

Caso: 2

Se $-1 < x < 1$ allora si ha

$$|x+1| \leqslant |x-1| \quad \Longrightarrow \quad (x+1) \leqslant -(x-1) \quad \Longrightarrow \quad 2x \leqslant 0$$

che ha soluzione

$$x \leqslant 0$$

Questa soluzione va intersecata con il dominio di definizione della disequazione $-1 < x < 1$ dando

$$\{-1 < x \leqslant 0\}$$

Esempio 6

$$|x+1| \leqslant |x-1|$$

Caso: 3

Se $x \leqslant -1$ allora si ha

$$|x+1| \leqslant |x-1| \quad \Longrightarrow \quad -(x+1) \leqslant -(x-1) \quad \Longrightarrow \quad -1 \leqslant 1$$

che ha soluzione per ogni x del dominio di esistenza

Quindi intersecando le condizioni si ha

$$\{x \leqslant -1\}$$

Esempio 6

$$|x+1| \leqslant |x-1|$$

Soluzione finale

La soluzione finale si ottiene unendo le tre soluzione

- $\{\emptyset\}$
- $\{-1 < x \leqslant 0\}$
- $\{x \leqslant -1\}$

ottenendo

$$\{x \leqslant -1\} \;\cup\; \{-1 < x \leqslant 0\} \quad \Longrightarrow \quad \{x \leqslant 0\}$$


FINE
Manolo Venturin