Disequazioni polinomiali con il valore assoluto

(Disequazioni notevoli)

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Disequazioni polinomiali con il valore assoluto
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Risolvere

1. $\left|\frac{2x-6}{3}\right| \geqslant 4$
2. $|x^2 - 8x + 10| < 3$
3. $\left|\frac{2x+1}{x-3}\right| \geqslant 2$
4. $x^2 + 2|x| - 3 > 0$
5. $1 + |x| - |x^2 - 1| \leqslant 0$

Disequazioni polinomiali con il valore assoluto

L'idea è di trovare il campo di validità del valore assoluto

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esempi

Esempio 1

> Risolvere
>
> $$\left|\frac{2x-6}{3}\right| \geqslant 4$$

Soluzione

Con il cambio di variabile

$$t = \frac{2x-6}{3}$$

si ha

$$|t| \geqslant 4 \qquad \Longrightarrow \{t \leqslant -4\} \;\vee\; \{t \geqslant 4\}$$

Esempio 1

$$|t| \geqslant 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \{t \leqslant -4\} \ \vee \ \{t \geqslant 4\} \quad , \quad t = \frac{2x-6}{3}$$

Quindi dobbiamo risolvere le seguenti due disequazioni:

- $t \leqslant -4 \implies \frac{2x-6}{3} \leqslant -4$
- $t \geqslant 4 \implies \frac{2x-6}{3} \geqslant 4$

La prima ha soluzione

$$\frac{2x-6}{3} \leqslant -4 \implies 2x \leqslant -12+6 \implies x \leqslant -3$$

La seconda ha soluzione

$$\frac{2x-6}{3} \geqslant 4 \implies 2x \geqslant 12+6 \implies x \geqslant 9$$

Esempio 1

$$|t| \geqslant 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \{t \leqslant -4\} \ \vee \ \{t \geqslant 4\} \quad , \quad t = \frac{2x-6}{3}$$

- $t \leqslant -4 \implies x \leqslant -3$
- $t \geqslant 4 \implies x \geqslant 9$

La soluzione finale si ottiene unendo le due soluzione, i.e

$$\{x \leqslant -3\} \ \vee \ \{x \geqslant 9\}$$

che in termini di intervalli corrisponde a

$$(-\infty, \ -3] \ \cup \ [9, \ +\infty)$$

Esempio 2

> Risolvere
>
> $$|x^2 - 8x + 10| < 3$$

Soluzione

La disequazione può essere riscritta come

$$-3 < x^2 - 8x + 10 < 3$$

Quindi si devono risolvere le seguenti due disequazioni

- $x^2 - 8x + 10 > -3$
- $x^2 - 8x + 10 < 3$

e intersecare successivamente le soluzioni

Esempio 2

$$-3 < x^2 - 8x + 10 < 3$$

La prima disequazione diventa

$$x^2 - 8x + 10 > -3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x + 13 > 0$$

Gli zeri sono

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 52}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = 4 \pm \sqrt{3}$$

Essendo $a = 1 > 0$ la disequazione è verificata per valori esterni alle radici i.e.

$$\{x < 4 - \sqrt{3}\} \ \vee \ \{x > 4 + \sqrt{3}\}$$

Esempio 2

$$-3 < x^2 - 8x + 10 < 3$$

La seconda disequazione diventa

$$x^2 - 8x + 10 < 3 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 8x + 7 < 0$$

Gli zeri sono

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = 4 \pm 3 = \{7,\ 1\}$$

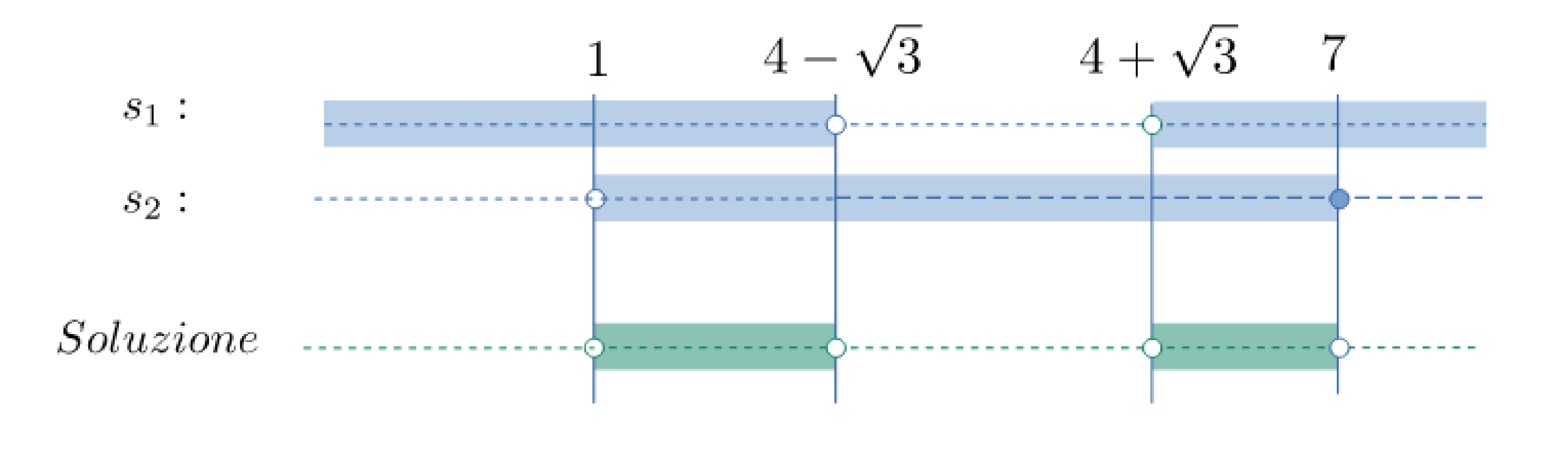
Essendo $a = 1 > 0$ la disequazione è verificata per valori interni alle radici i.e.

$$\{1 < x < 7\}$$

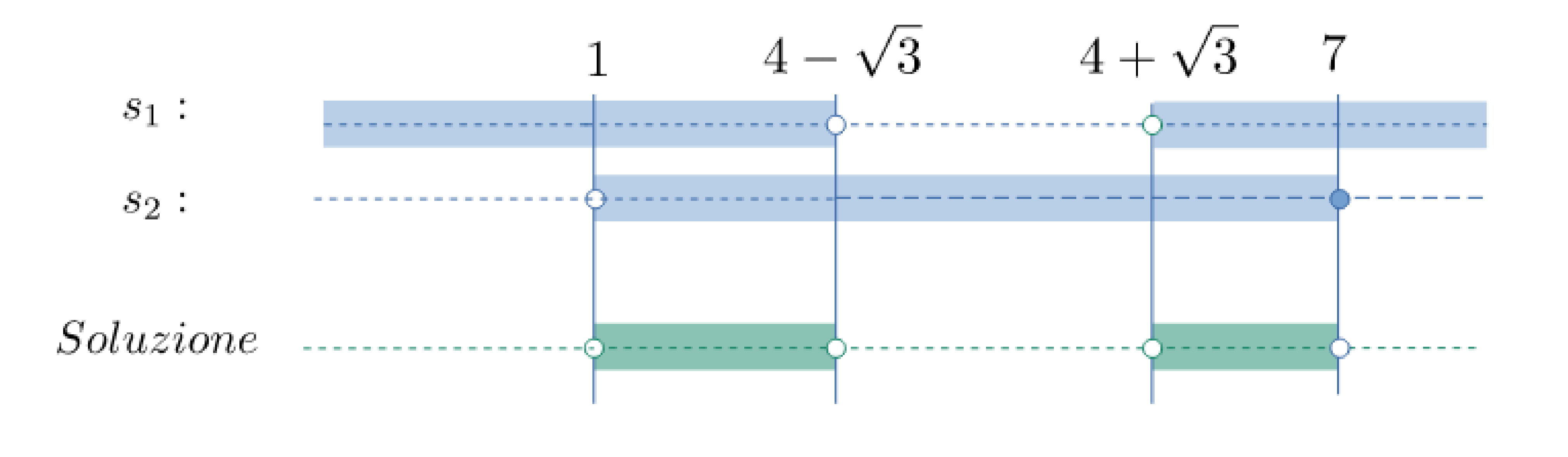
Esempio 2

$$-3 < x^2 - 8x + 10 < 3$$

- $\{x < 4 - \sqrt{3}\} \ \vee \ \{x > 4 + \sqrt{3}\}$
- $\{1 < x < 7\}$



Esempio 2



La soluzione finale si ottiene intersecando le due soluzioni, i.e.

$$\{1 < x < 4 - \sqrt{3}\} \ \vee \ \{4 + \sqrt{3} < x < 7\}$$

che in termini di intervalli corrisponde a

$$(1,\ 4 - \sqrt{3}) \ \cup \ (4 + \sqrt{3},\ 7)$$

Esempio 3

> Risolvere
>
> $$\left|\frac{2x+1}{x-3}\right| \geqslant 2$$

Soluzione

La disequazione corrisponde alle seguenti due disequazioni

- $\frac{2x+1}{x-3} \geqslant 2$, oppure
- $\frac{2x+1}{x-3} \leqslant -2$

Esempio 3

$$\frac{2x+1}{x-3} \geqslant 2 \quad \vee \quad \frac{2x+1}{x-3} \leqslant -2$$

La prima disequazione può essere riscritta come

$$\frac{2x+1}{x-3} - 2 \geqslant 0 \implies \frac{2x+1-2(x-3)}{x-3} \geqslant 0 \implies \frac{5}{x-3} \geqslant 0$$

che è positiva per

$$x > 3$$

Esempio 3

$$\frac{2x+1}{x-3} \geqslant 2 \quad \vee \quad \frac{2x+1}{x-3} \leqslant -2$$

La seconda disequazione può essere riscritta come

$$\frac{2x+1}{x-3} + 2 \leqslant 0 \implies \frac{2x+1+2(x-3)}{x-3} \leqslant 0 \implies \frac{4x-5}{x-3} \leqslant 0$$

Applichiamo lo studio del segno della frazione.

Il numeratore è positivo o uguale a zero se $4x - 5 \geqslant 0 \implies x \geqslant \frac{5}{4}$

Il denominatore è positivo se $x - 3 > 0 \implies x > 3$

Applicando la regola dei segni, la disequazione è negativa (soluzione richiesta) se

$$\frac{5}{4} \leqslant x < 3$$

Esempio 3

- $x > 3$
- $\frac{5}{4} \leqslant x < 3$

La soluzione finale si ottiene unendo le due soluzioni, i.e.

$$\left\{\frac{5}{4} \leqslant x < 3\right\} \vee \{x > 3\}$$

che in termini di intervalli corrisponde a

$$\left[\frac{5}{4},\ 3\right) \cup (3,\ +\infty)$$

Esempio 4

> Risolvere
>
> $$x^2 + 2|x| - 3 > 0$$

Soluzione

Per risolvere questo tipo di disequazioni dobbiamo esplicitare il $|x|$ in modo tale poter semplificarla.

Ricordando la definizione di $|x|$ si hanno le seguenti due casistiche:

1. $x \geqslant 0$
2. $x < 0$

Esempio 4

$$x^2 + 2|x| - 3 > 0$$

Se $x \geqslant 0$ si ha

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Se $x < 0$ si ha

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Esempio 4

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Soluzione di 1

Gli zeri di

$$x^2 + 2x - 3$$

sono

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \{1, \ -3\}$$

Essendo $a > 0$, la disequazione è positiva per valori esterni,

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \implies \{x < -3\} \vee \{x > 1\}$$

Esempio 4

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Intersencando le soluzioni

- $\{x \geqslant 0\}$
- $\{x < -3\} \ \vee \ \{x > 1\}$

si ha

$$\mathcal{S}_1 = \{x > 1\}$$

Esempio 4

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Soluzione di 2

Gli zeri di

$$x^2 - 2x - 3$$

sono

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \{3, \quad -1\}$$

Essendo $a > 0$, la disequazione è positiva per valori esterni,

$$x^2 - 2x - 3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \{x < -1\} \ \vee \ \{x > 3\}$$

Esempio 4

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

Intersencando le soluzioni

- $\{x < 0\}$
- $\{x < -1\} \ \vee \ \{x > 3\}$

si ha

$$\mathcal{S}_1 = \{x < -1\}$$

Esempio 4

Soluzione finale

La soluzione finale è l'unione delle due, i.e.

$$\mathcal{S} = \{x < -1\} \ \vee \ \{x > 1\}$$

Nota: Si poteva studiare solamente il caso $x \geqslant 0$ osservando che la disequazione è una funzione pari e quindi concludere per simmetria la soluzione.

Esempio 5

> Risolvere
>
> $$1 + |x| - |x^2 - 1| \leqslant 0$$

Soluzione

Per risolvere questa disequazioni dobbiamo esplicitare i diversi moduli.

Notiamo che la disequazione è pari (quindi la studiamo solamente per $x \geqslant 0$)

Ricordando la definizione modulo per x e $x^2 - 1$ si hanno le seguenti tre casistiche:

1. $x \geqslant 1$ dove $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ e $|x| = x$
2. $0 \leqslant x < 1$ dove $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$ e $|x| = x$

Esempio 5

Soluzione di 1

Se $x \geqslant 1$ dove $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ e $|x| = x$

$$1 + |x| - |x^2 - 1| \leqslant 0 \implies 1 + x - (x^2 - 1) \leqslant 0 \implies -x^2 + x + 2 \leqslant 0$$

Ora si ha

$$-x^2 + x + 2 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \{-1,\ 2\}$$

$$-x^2 + x + 2 \leqslant 0 \implies \{x \leqslant -1\} \vee \{x \geqslant 2\}$$

Quindi la soluzione (intersezione) è:

$$\{x \geqslant 2\}$$

Esempio 5

Soluzione di 2

Se $0 \leqslant x < 1$ dove $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$ e $|x| = x$ allora

$$1 + |x| - |x^2 - 1| \leqslant 0 \implies 1 + x + (x^2 - 1) \leqslant 0 \implies x^2 + x \leqslant 0$$

Ora si ha

$$x^2 + x \leqslant 0 \implies x(x+1) \leqslant 0 \implies \{-1 \leqslant x \leqslant 0\}$$

Quindi la soluzione (intersezione) è:

$$x = \{0\}$$

Esempio 5

Soluzione finale

La soluzione finale si ottiene unendo le due soluzioni

- $\{x \geqslant 2\}$
- $x = \{0\}$

e considerando la parità, da cui si ha la soluzione finale

$$\mathcal{S} = \{x \leqslant -2\} \ \cup \ \{0\} \ \cup \ \{x \geqslant 2\}$$


FINE
Manolo Venturin