Rapporto

(Disequazioni notevoli)

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Disequazione data dal rapporto tra polinomi
- Studio del segno del numeratore
- Studio del segno del denominatore

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Risolvere

1. $\frac{x+2}{x^2-5x+4} \geqslant 0$
2. $\frac{6}{2x-1} > \frac{5}{x-2}$
3. $\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x+1} \geqslant 0$
4. $\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1} \leqslant 0$
5. $\frac{x^2-5x+4}{9-4x^2} \geqslant 0$
6. $\frac{x\cdot(x^2-4)}{(x^2-3)(x^2-8x+12)} \leqslant 0$

Disequazione rapporto tra polinomi

Condizioni di esistenza

In questa lezione studieremo disequazioni del tipo

$$\frac{N(x)}{D(x)} \underset{>}{\leq} 0$$

ovvero rapporto tra due polinomi ($N(x)$ il numeratore e $D(x)$ il denominatore)

Allora studio del segno della disequazione va aggiunta la condizione di esistenza $D(x) \neq 0$, i.e. vanno esclusi gli zeri del denominatori (chiamati anche poli)

Esempi

Esempio 1

Risolvere

$$\frac{x+2}{x^2-5x+4} \geqslant 0$$

Soluzione

Segno del numeratore

$$x+2 \geqslant 0 \implies x \geqslant -2$$

Esempio 1

$$\frac{x+2}{x^2-5x+4} \geqslant 0$$

Segno del denominatore

Zeri:

$$x^2-5x+4=0 \implies x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\{4,\ 1\}$$

Il denominatore può essere fattorizzato in

$$1\cdot(x-1)\cdot(x-4)$$

Segno del denominatore ($a=1$ quindi è positivo per valore esterni):

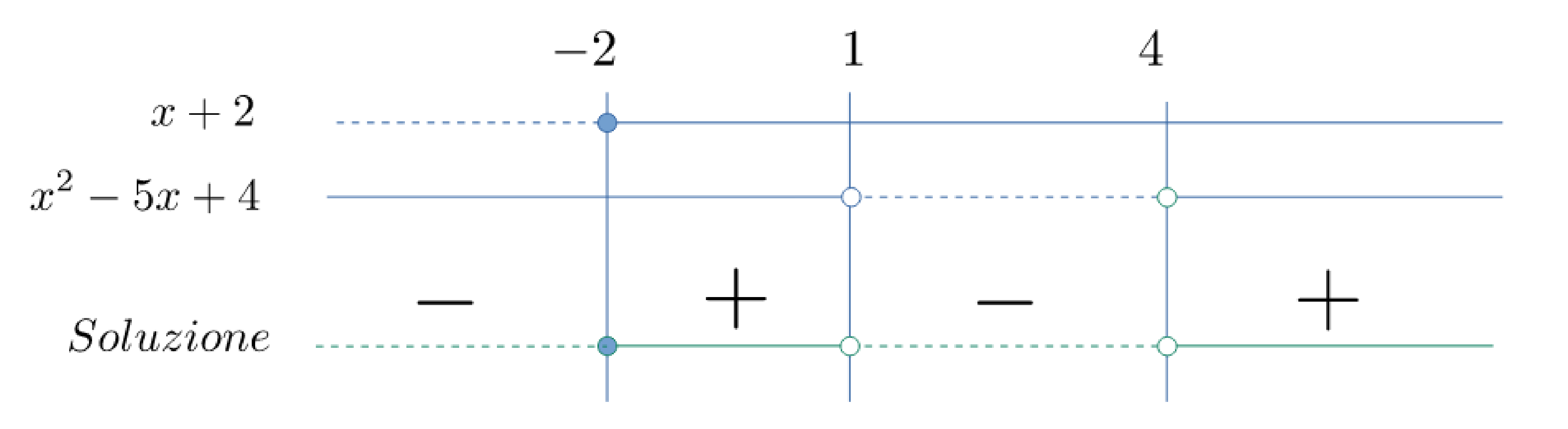
$$x^2-5x+4>0 \implies \{x<1\} \vee \{x>4\}$$

Esempio 1

$$\frac{x+2}{x^2-5x+4} \geqslant 0$$

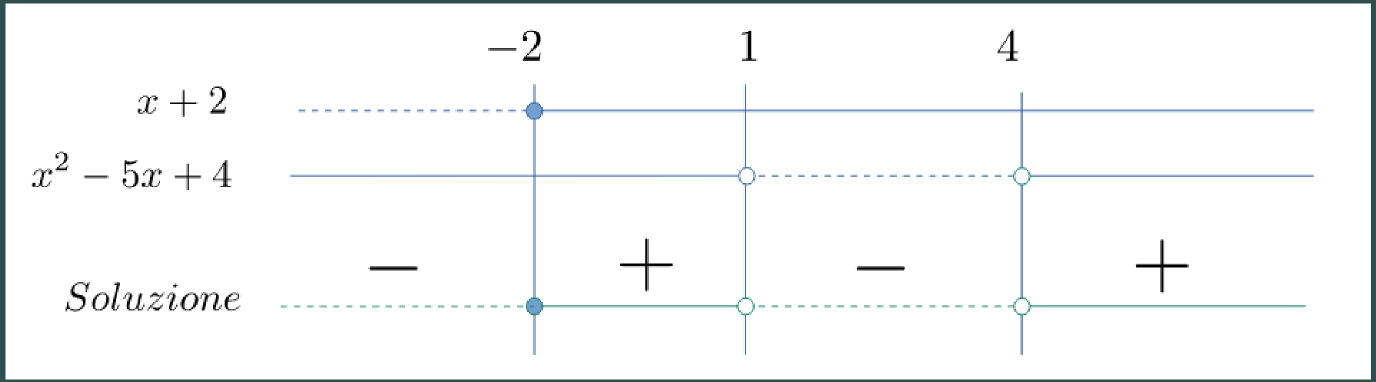
Segno della frazione

Dobbiamo combinare il segno del numeratore con il segno del denominare escludendo gli zeri del denominatore (poli)



Esempio 1

$$\frac{x+2}{x^2-5x+4} \geqslant 0$$



Dalla figura si ha la soluzione:

$$\mathcal{S} = \{-2 \leqslant x < 1\} \ \vee \ \{x > 4\}$$

corrispondenti agli intervalli

$$[-2,\ 1) \cup (4,\ +\infty)$$

Esempio 2

> Risolvere
>
> $$\frac{6}{2x-1} > \frac{5}{x-2}$$

Soluzione

Bisogna portare la disequazione in forma standard, ovvero deve essere della forma

$$\frac{N(x)}{D(x)} \lesseqgtr 0$$

dove il termine di destra deve essere 0.

Questo è essenziale per poter applicare la legge dell'annullamento del prodotto e la regola dei segni.

Esempio 2

$$\frac{6}{2x-1} > \frac{5}{x-2}$$

La disequazione può essere riscritta come

$$\frac{6(x-2)-5(2x-1)}{(2x-1)(x-2)} > 0$$

$$\frac{-4x-7}{(2x-1)(x-2)} > 0$$

$$(\text{moltiplico per } -1) \text{ per semplificarla ulteriormente}$$

$$\frac{4x+7}{(2x-1)(x-2)} < 0$$

Esempio 2

$$\frac{4x+7}{(2x-1)(x-2)} < 0$$

Segno del numeratore

Nello studio del segno del numeratore evitiamo di studiare l'uguaglianza in quanto la disequazione di partenza non lo possiede.

$$4x+7>0 \implies x > -\frac{7}{4}$$

Segno del denominatore

Studio dei singoli fattori:

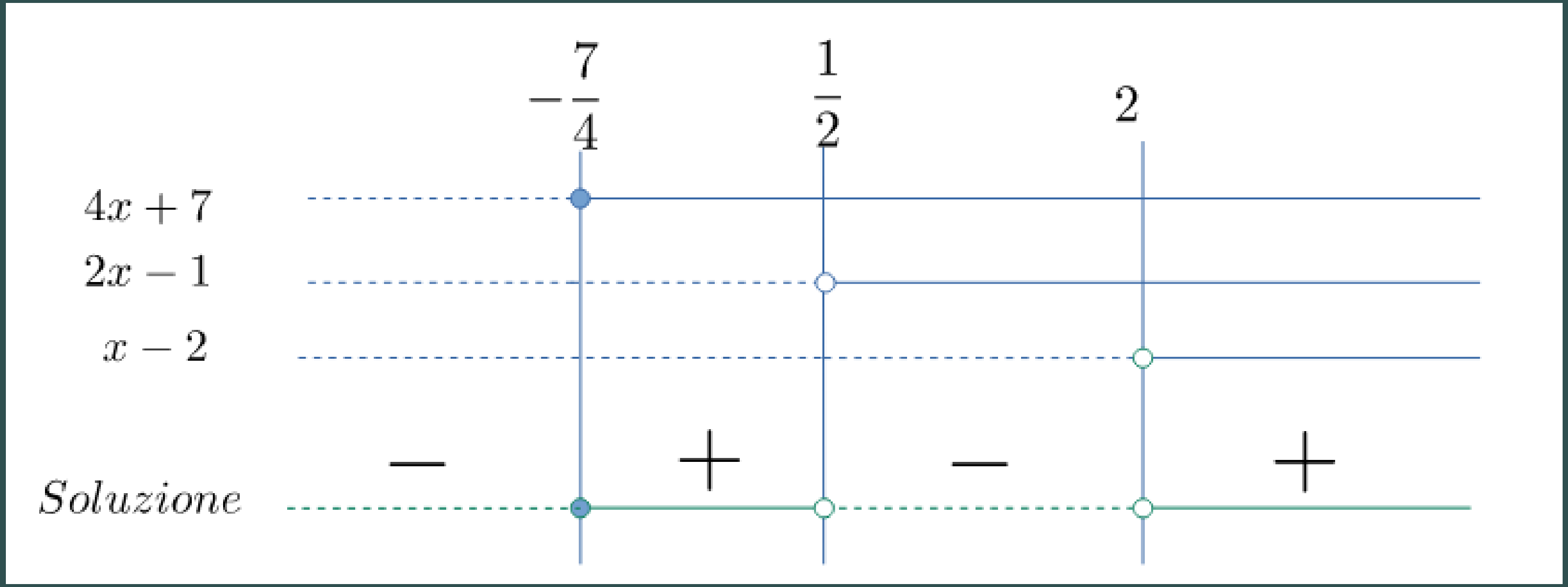
1. $2x-1>0 \implies x > \frac{1}{2}$
2. $x-2>0 \implies x>2$

Esempio 2

$$\frac{4x+7}{(2x-1)(x-2)} < 0$$

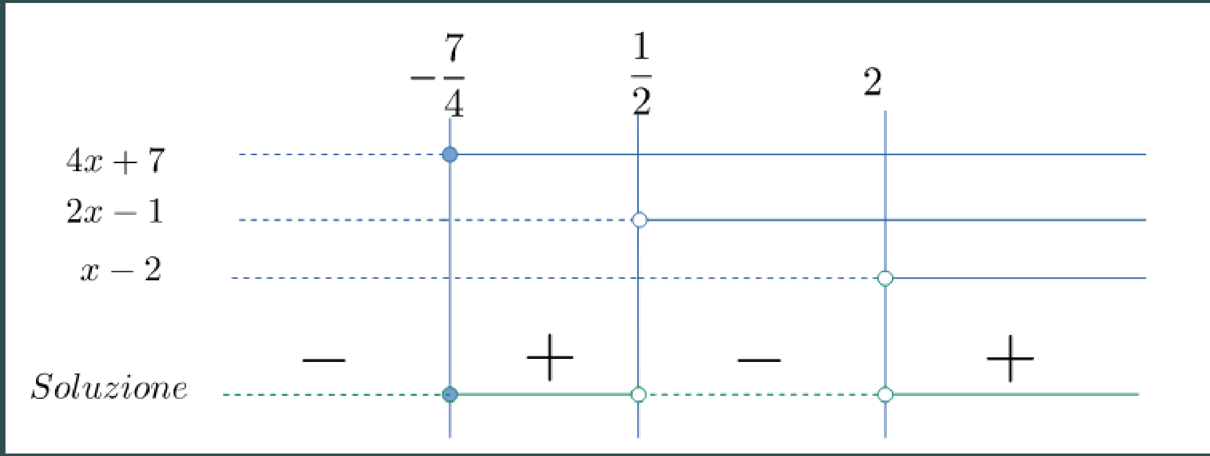
Segno della frazione

Riportiamo nella figura i segni dei 3 fattori



Va scelta la soluzione negativa (dall'ultima disequazione semplificata).

Esempio 2



Dalla figura si ha la soluzione (negativa):

$$\mathcal{S} = \left\{x \leqslant -\frac{7}{4}\right\} \vee \left\{\frac{1}{2} < x < 2\right\}$$

corrispondenti agli intervalli

$$\left(-\infty,\ -\frac{7}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2},\ 2\right)$$

Esempio 3

Risolvere

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2+2x+1} \geqslant 0$$

Soluzione

Studio del segno del numeratore

Zeri:

$$x^2-5x+4=0 \implies x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\{4,\ 1\}$$

Segno del numeratore ($a=1$ quindi è positivo o uguale a zero per valore esterni):

$$x^2-5x+4 \geqslant 0 \implies \{x \leqslant 1\} \ \vee \ \{x \geqslant 4\}$$

Esempio 3

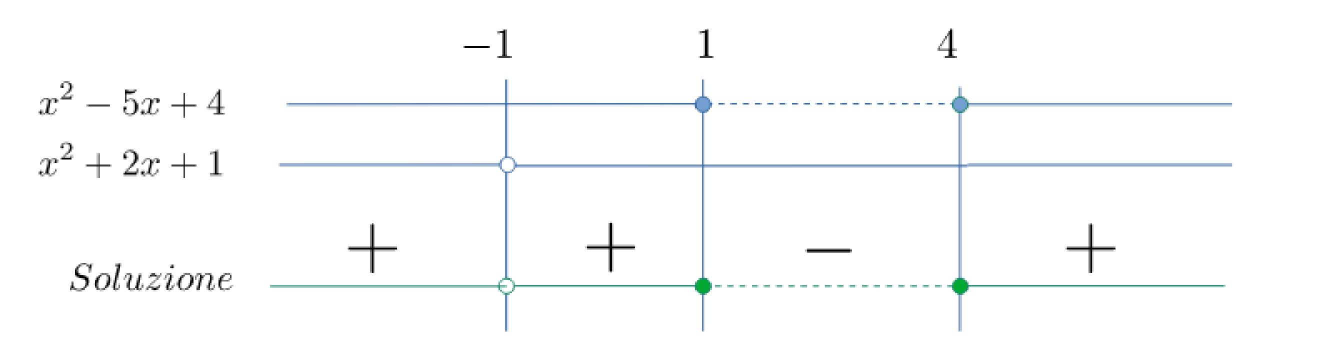
$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 1} \geqslant 0$$

Studio del segno del denominatore

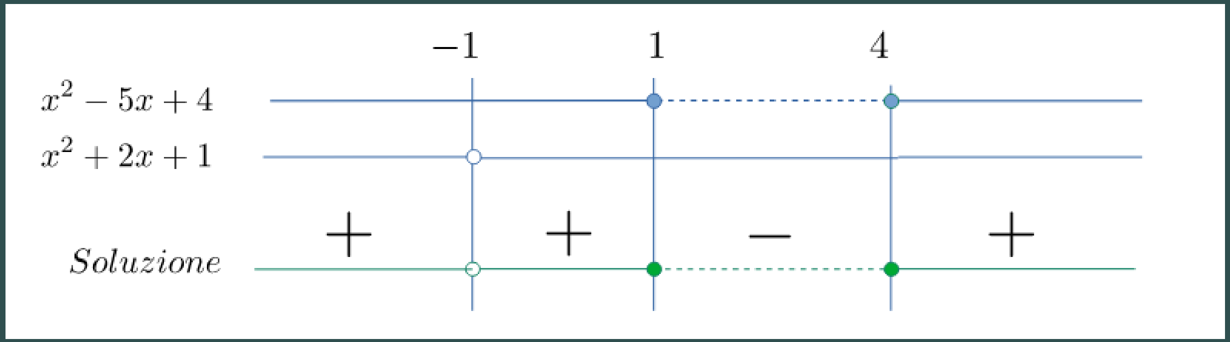
Il denominatore è il prodotto notevole (quadrato di un binomio):

$$(x+1)^2$$

Quindi è sempre positivo tranne quando vale zero, che deve essere escluso perché al denominatore non posso dividere per zero.



Esempio 3



Soluzione finale

Il segno della frazione è dato dal segno del numeratore (il denominatore è sempre positivo). escluso il punto 1 come da grafico.

Soluzione:

$$\mathcal{S} = \{x < -1\} \ \vee \ \{-1 < x \leqslant 1\} \ \vee \ \{x \geqslant 4\}$$

In termini di intervalli:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 1] \cup [4, \infty)$$

Esempio 4

Risolvere

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1} \leqslant 0$$

Soluzione

Studio del segno del numeratore

Zeri:

$$x^2-5x+4=0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2}=\frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}=\frac{5 \pm 3}{2}=\{4,\ 1\}$$

Segno del numeratore ($a=1$ quindi è positivo o uguale a zero per valore esterni):

$$x^2-5x+4 \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \{x \leqslant 1\} \ \vee \ \{x \geqslant 4\}$$

Esempio 4

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1} \leqslant 0$$

Studio del segno del denominatore

Da

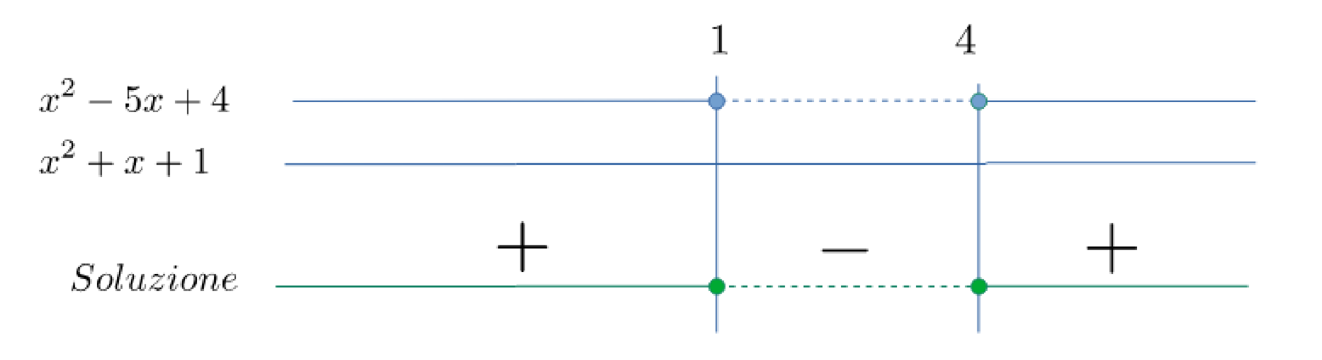
$$\Delta = 1-4 = -3 < 0$$

si ha che il denominatore è irriducibile, infatti è la somma di due quadrati

$$x^2+x+1 = \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

e risulta pertanto sempre positivo.

Esempio 4



Soluzione finale

Il segno della frazione è dato dal segno del numeratore (il denominatore è sempre positivo). Viene richiesto di cercare i valore negativi o uguali a zero, pertanto la soluzione finale è

$$\mathcal{S} = \{1 \leqslant x \leqslant 4\}$$

In termini di intervalli:

$$[1, 4]$$

Esempio 5

Risolvere

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{9 - 4x^2} \geqslant 0$$

Soluzione

Moltiplichiamo per -1 la disequazione per rendere il denominatore più facile da studiare, i.e.

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{4x^2 - 9} \leqslant 0$$

Esempio 5

$$\frac{x^2-5x+4}{4x^2-9}\leqslant 0$$

Studio del segno del numeratore

Zeri:

$$x^2-5x+4=0 \implies x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}=\{4,\ 1\}$$

Segno del numeratore ($a=1$ quindi è positivo o uguale a zero per valore esterni):

$$x^2-5x+4\geqslant 0 \implies \{x\leqslant 1\}\ \vee\ \{x\geqslant 4\}$$

Esempio 5

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{4x^2 - 9} \leqslant 0$$

Studio del segno del denominatore

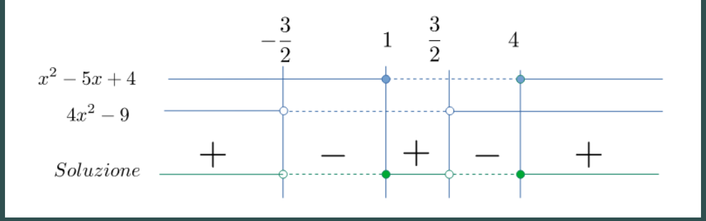
Zeri:

$$4x^2 - 9 = 0 \implies x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}$$

Segno del denominatore ($a > 0$ quindi è positivo e diverso da zero per valore esterni):

$$4x^2 - 9 > 0 \implies \left\{x < -\frac{3}{2}\right\} \vee \left\{x > \frac{3}{2}\right\}$$

Esempio 5



Soluzione finale

Il segno della frazione è dato dal segno del numeratore combinato con quello del denominatore. Viene richiesto di cercare i valore negativi (abbiamo trasformato la disequazione) o uguali a zero, pertanto la soluzione finale è

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2} < x \leqslant 1\right\} \vee \left\{\frac{3}{2} < x \leqslant 4\right\}$$

In termini di intervalli:

$$\left(-\frac{3}{2}, 1\right] \cup \left(\frac{3}{2}, 4\right]$$

Esempio 6

> Risolvere
>
> $$\frac{x \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 3)(x^2 - 8x + 12)} \leqslant 0$$

Soluzione

Studiamo i singoli fattori ricordando che il denominatore non può assumere valori pari a zero.

Fattore 1:

$$x > 0$$

Esempio 6

$$\frac{x\cdot(x^2-4)}{(x^2-3)(x^2-8x+12)}\leqslant 0$$

Fattore 2

$$x^2-4\geqslant 0 \implies x^2\geqslant 4 \implies \{x\leqslant -2\}\ \vee\ \{x\geqslant 2\}$$

Fattore 3

$$x^2-3>0 \implies x^2>3 \implies \{x<\sqrt{3}\}\ \vee\ \{x>\sqrt{3}\}$$

Fattore 4

$$x^2-8x+12=0 \implies x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}=\{6,\ 2\}$$

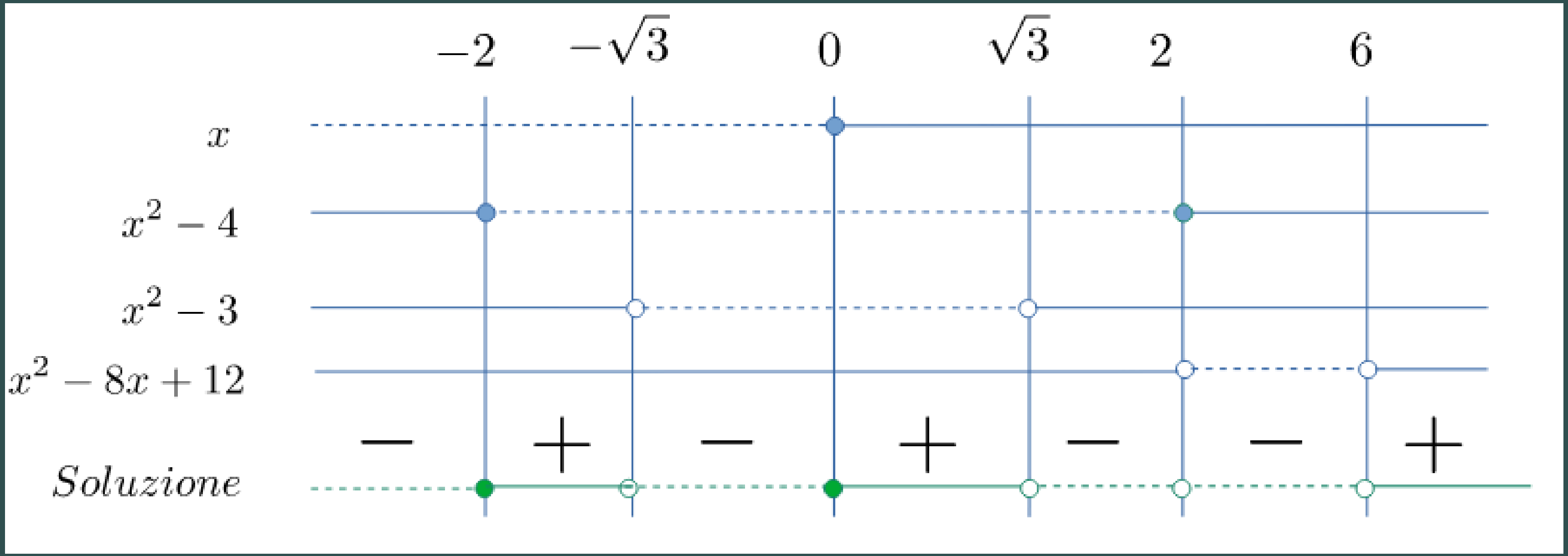
$$x^2-8x+12>0 \implies \{x<2\}\ \vee\ \{x>6\}$$

Esempio 6

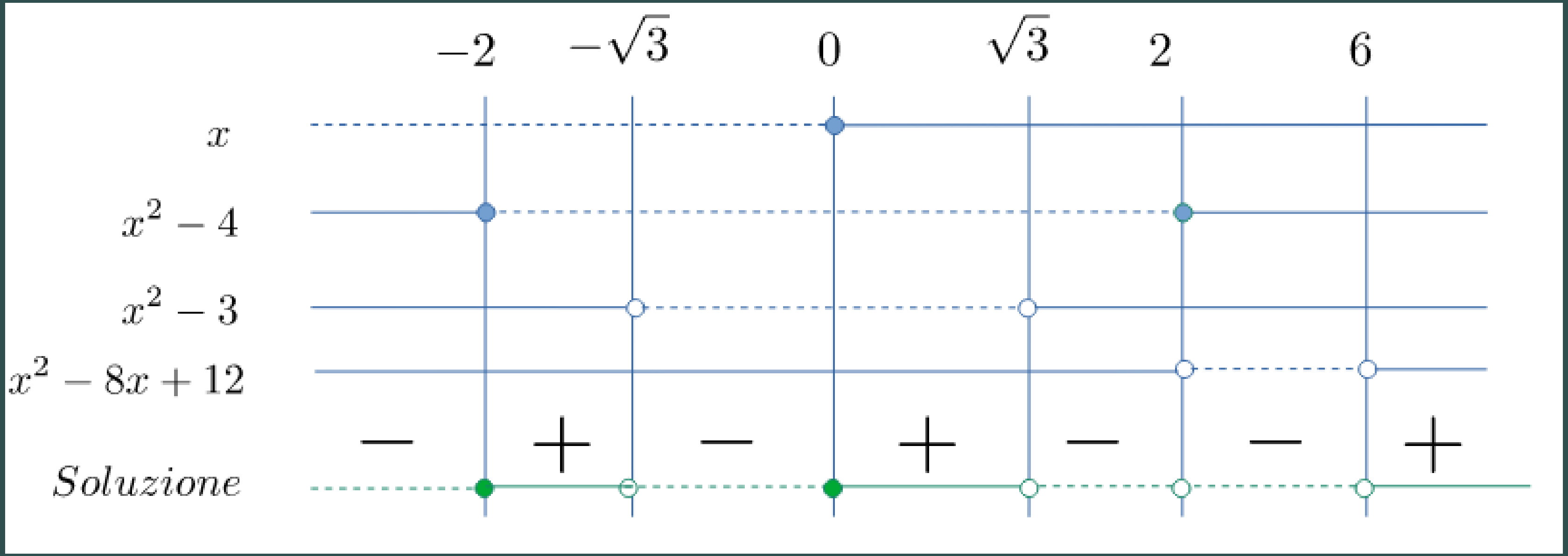
$$\frac{x \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 3)(x^2 - 8x + 12)} \leqslant 0$$

Soluzione finale (parte negativa)

Attenzione che il punto 2 pur essendo uno zero del fattore 2, è da escludere perché non fa parte delle condizioni di esistenza (zero del fattore 4)



Esempio 6



La soluzione è:

$$\mathcal{S} = \{x \leqslant -2\} \ \vee \ \{-\sqrt{3} < x \leqslant 0\} \ \vee \ \{\sqrt{3} < x < 2\} \ \vee \ \{2 < x < 6\}$$

In termini di intervalli:

$$(-\infty, \ -2] \cup (-\sqrt{3}, \ 0] \cup (\sqrt{3}, \ 2) \cup (2, \ 6)$$


FINE
Manolo Venturin