

# Disequazioni biquadratiche e reciproche

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Biquadratiche
- Trasformazione per riduzione al secondo grado

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esempi

Risolvere

1.  $x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0$

2.  $x^4 - 2x^2 \geq 0$

3.  $x^{10} - x^6 \leq 0$

4.  $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 \leq 0$

# Biquadratiche

Sono disequazioni di grado maggiore al secondo ma che con l'ausilio di un'opportuna **trasformazione** possono essere ricondotte a **disequazioni di secondo grado**, i.e. sono del tipo

$$ax^{2n} + bx^n + c \lesseqgtr 0$$

La disequazione va risolta nei seguenti passi:

1. Si esegue la sostituzione  $t = x^n$  arrivando alla disequazione

$$at^2 + bt + c \lesseqgtr 0$$

2. Si risolve la disequazione quadratica trovando la validità di  $t$
3. Si risolve la disequazione in  $x$  sapendo la validità di  $t$

# Esempio 1

Risolvere

$$x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0$$

## Soluzione

Con la sostituzione  $t = x^2$  la disequazione diventa

$$t^2 - 2t - 8 \leq 0$$

Gli zeri dell'equazione sono

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \{4, -2\}$$

# Esempio 1

$$t^2 - 2t - 8 \leq 0$$

Quindi, essendo  $a > 0$  e i valori cercati minori o uguali a zero, la soluzione della disequazione in  $t$  è (valori interni)

$$-2 \leq t \leq 4$$

o riscritta come sistema

$$\begin{cases} t \geq -2 \\ t \leq 4 \end{cases}$$

Con la trasformazione utilizzata,  $t = x^2$  le disequazioni precedenti diventano:

$$\begin{cases} x^2 \geq -2 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$$

# Esempio 1

$$\begin{cases} x^2 \geq -2 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$$

La prima disequazione  $x^2 \geq -2$  è sempre verificata, i.e. ha soluzione

$$\mathbb{R}$$

mentre la seconda ha soluzione

$$\{-2 \leq x \leq 2\}$$

Intersecano le due soluzioni si ottiene la soluzione finale

$$\mathcal{S} = \{-2 \leq x \leq 2\}$$

# Esempio 2

Risolvere

$$x^4 - 2x^2 \geq 0$$

in due modi diversi (annullamento del prodotto e biquadratica).

## Soluzione

Due strategie possibili:

- Soluzione con annullamento del prodotto
- Soluzione con biquadratica

# Esempio 2

## Soluzione con annullamento del prodotto

La disequazione può essere riscritta come

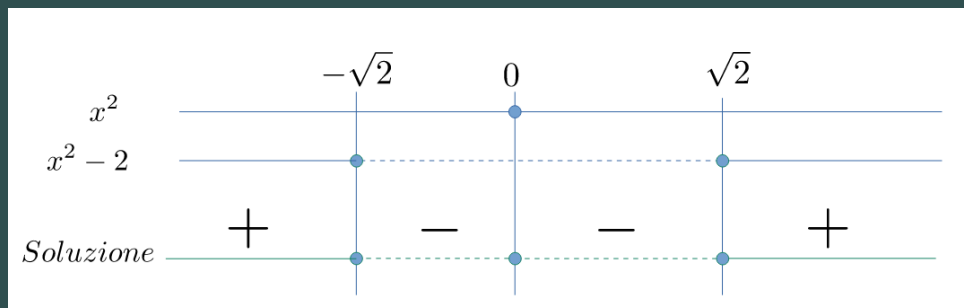
$$x^2(x^2 - 2) \geq 0$$

Il segno di  $x^2$  è sempre positivo e uguale a zero per  $x = 0$ .

Il segno di  $x^2 - 2 \geq 0$  è

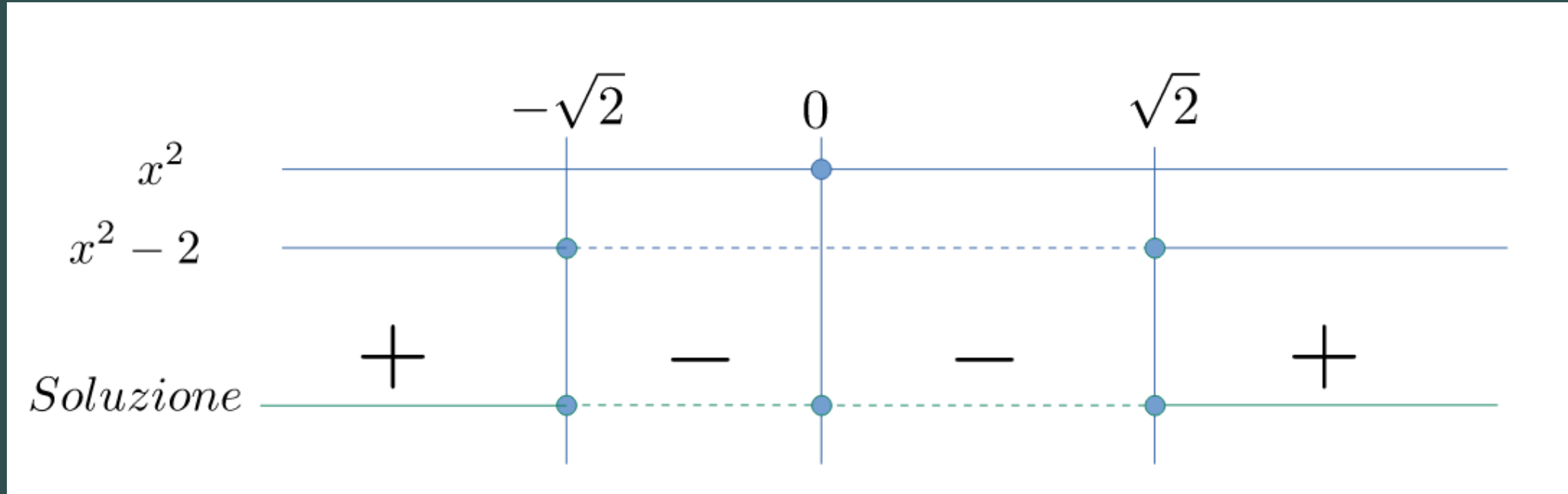
$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

Il segno è riportato in figura.



# Esempio 2

$$x^4 - 2x^2 \geq 0$$



La soluzione finale è

$$\mathcal{S} = \{x \leq -\sqrt{2}\} \vee \{0\} \vee \{x \geq \sqrt{2}\}$$

# Esempio 2

## Soluzione con biquadratica

Con la sostituzione  $t = x^2$  la disequazione diventa

$$t^2 - 2t \geq 0$$

che ha soluzione

$$\{t \leq 0\} \vee \{t \geq 2\}$$

Quindi dobbiamo unire le seguenti due disequazioni nella variabile  $x$ :

$$x^2 \leq 0 \quad \vee \quad x^2 \geq 2$$

# Esempio 2

$$x^2 \leq 0 \quad \vee \quad x^2 \geq 2$$

La prima  $x^2 \leq 0$  ha soluzione  $\{x = 0\}$

La seconda  $x^2 \geq 2$  ha soluzione

$$\{x \leq -\sqrt{2}\} \quad \vee \quad \{x \geq \sqrt{2}\}$$

La soluzione finale  $\mathcal{S}$  si ottiene unendo le due soluzioni

$$\mathcal{S} = \{x \leq -\sqrt{2}\} \quad \vee \quad \{0\} \quad \vee \quad \{x \geq \sqrt{2}\}$$

# Esempio 3

Risolvere

$$x^{10} - x^6 \leq 0$$

## Soluzione

La disequazione può essere riscritta come

$$x^6(x^4 - 1) \leq 0$$

Applichiamo la regola dei segni.

Il fattore  $x^6$  è sempre positivo e vale 0 in  $x = 0$ .

Quindi ci basta studiare

$$x^4 - 1 \leq 0$$

  che con il cambio di variabile  $t = x^2$  diventa  $t^2 - 1 \leq 0$

# Esempio 3

$$t^2 - 1 \leq 0$$

Quindi  $t^2 - 1 \leq 0$  ha soluzione

$$-1 \leq t \leq 1$$

Con il cambio originario se deve risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} t \geq -1 \\ t \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 \geq -1 \\ x^2 \leq 1 \end{cases}$$

La cui soluzione finale è

$$-1 \leq x \leq 1$$

Essendo  $x^6$  sempre positivo e vale zero quando  $x = 0$  la soluzione finale è

$$\mathcal{S} = \{-1 \leq x \leq 1\}$$



# Reciproche

Sono qui introdotte più per curiosità che utilità per esercizi che capitano agli esami.

Un polinomio  $P(x)$  è detto a radici reciproche se  $x_0$  è una radice allora anche  $\frac{1}{x_0}$  è una radice.

Se si esegue la trasformazione  $t = x + \frac{1}{x}$  allora si semplifica l'espressione polinomiale.

Ad esempio, un polinomio quarto grado a radici reciproche è della forma

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a \lesseqgtr 0$$

Dividendo per  $x^2$  (sempre positivo) e l'espressione polinomiale diventa

$$a \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left( x + \frac{1}{x} \right) + c \lesseqgtr 0 \implies a \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2a + b \left( x + \frac{1}{x} \right) + c \lesseqgtr 0$$

introducendo il cambio di variabile  $t = x + \frac{1}{x}$  si ha

$$at^2 + bt + c - 2a \lesseqgtr 0$$



# Esempio 4

Risolvere

$$2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 \leq 0$$

## Soluzione

La disequazione può essere riscritta (dividendo prima per  $x^2$ ) come

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 \leq 0 \implies 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 \leq 0$$

Con la sostituzione  $t = x + \frac{1}{x}$  si ha

$$2t^2 + t - 10 \leq 0$$

# Esempio 4

$$2t^2 + t - 10 \leq 0 \quad , \quad t = x + \frac{1}{x}$$

Ha radici

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} = \left\{ 2, \quad -\frac{5}{2} \right\}$$

e quindi soluzione

$$-\frac{5}{2} \leq t \leq 2$$

Quindi, ritornando alla sostituzione originaria, dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} t \geq -\frac{5}{2} \\ t \leq 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq -\frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} \leq 2 \end{cases}$$

# Esempio 4

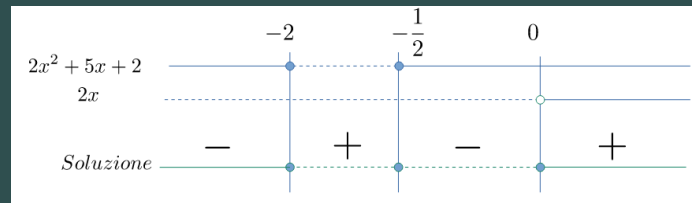
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq -\frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} \leq 2 \end{cases}$$

La disequazione

$$x + \frac{1}{x} \geq -\frac{5}{2} \implies \frac{2x^2 + 5x + 2}{2x} \geq 0$$

ha soluzione

$$\left\{ -2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \right\} \vee \{x > 0\}$$



# Esempio 4

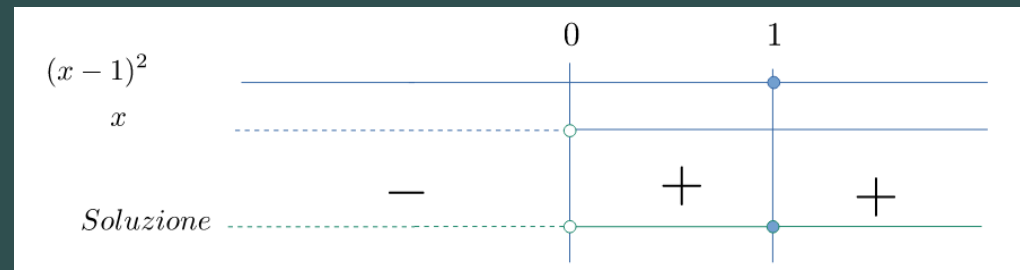
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} \geq -\frac{5}{2} \\ x + \frac{1}{x} \leq 2 \end{cases}$$

La disequazione

$$x + \frac{1}{x} \leq 2 \implies \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \leq 0 \implies \frac{(x - 1)^2}{x} \leq 0$$

ha soluzione

$$\{x < 0\} \vee \{1\}$$



# Esempio 4

Intersecando le due soluzioni

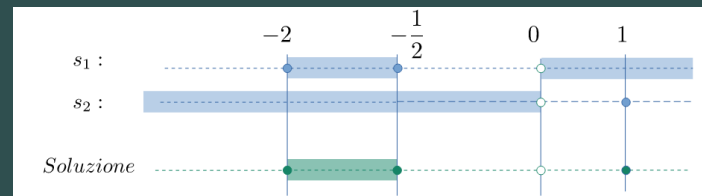
$$\left\{ -2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \right\} \vee \{x > 0\}$$

e

$$\{x < 0\} \vee \{1\}$$

si ha la soluzione finale

$$\mathcal{S} = \left\{ -2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \right\} \vee \{1\}$$





FINE