Disequazioni grado superiore al secondo

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Teorema fondamentale dell’algebra (conseguenza)
- Fattorizzazione
- Studio dei segni
- Esempi

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Risolvere

1. $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \geqslant 0$
2. $x^5 - x^3 + 2x^2 - 6x + 4 < 0$

Teorema fondamentale dell'algebra (conseguenza)

> Ogni polinomio di grado $n \geqslant 1$ a coefficienti reali si può scomporre nel prodotto di fattori reali di I o II grado (riducibili o meno)

- Se i fattori di II grado sono irriducibili: il segno è sempre positivo o negativo

Disequazione modello

$$\text{Fattore}_1 \cdot \text{Fattore}_2 \cdot \ldots \cdot \text{Fattore}_n \lesseqgtr 0$$

dove un singolo fattore è:

- equazione di I grado
- equazione di II grado

Procedura generale

1. Fattorizzazione del polinomio
2. Studio del segno dei singoli fattori (“+” e “-”)
3. Studio del segno generale, come prodotto dei segni dei singoli fattori

Esempi

Esempio 1

Risolvere

$$3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 \geqslant 0$$

Soluzione: fattorizzazione

Si trova che $x = 2/3$ è radice, infatti

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -2 & -6 & +4 \\ 2/3 & & +2 & 0 & -4 \\ \hline & 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}$$

Da cui la fattorizzazione $3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = (x - 2/3)\,(3x^2 - 6)$

Gli zeri di $3x^2 - 6$ sono $x^2 = 2 \implies x = \{\pm\sqrt{2}\}$

Esempio 1

$$3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = (x - 2/3)\,(3x^2 - 6) \geqslant 0$$

Soluzione: segno del fattore 1

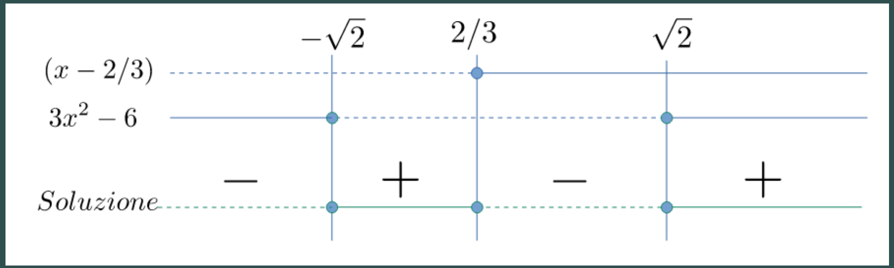
$(x - 2/3) \geqslant 0 \implies x \geqslant \frac{2}{3}$

Soluzione: segno del fattore 2

Gli zeri di $3x^2 - 6$ sono $x^2 = 2 \implies x = \{\pm\sqrt{2}\}$

$3x^2 - 6 \geqslant 0 \implies \{x \leqslant -\sqrt{2}\} \vee \{x \geqslant \sqrt{2}\}$

Soluzione: segno finale



Soluzione: $\{-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\} \vee \{x \geqslant \sqrt{2}\}$

Manolo Venturin

Esempio 2

> Risolvere
>
> $$P(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 6x + 4 < 0$$

Soluzione: fattorizzazione

Le radici razionali di $P(x)$ sono da ricercare nell'insieme $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

- Per $x = -1$ si ha $P(-1) = -1 + 1 + 2 + 6 + 4 \neq 0 \implies$ non è una radice
- Per $x = 1$ si ha $P(1) = 1 - 1 + 2 - 6 + 4 = 0 \implies$ è una radice

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & 0 & -1 & 2 & -6 & & +4 \\ 1 & & 1 & 1 & 0 & 2 & & -4 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 2 & -4 & & 0 \end{array}$$

da cui la fattorizzazione $P(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + 2x - 4)$

Manolo Venturin

Esempio 2

$$P(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + 2x - 4) < 0$$

Le radici razionali di $P_1(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$ sono da ricercare nell'insieme $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

- Per $x = -1$ si ha $P_1(-1) = 1 - 1 + 2 - 4 \neq 0 \implies$ non è una radice
- Per $x = 1$ si ha $P_1(1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0 \implies$ è una radice

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

da cui la fattorizzazione

$$P(x) = (x-1)P_1(x) = (x-1)(x-1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) = (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$$

Esempio 2

$$P(x) = (x-1)^2(x^3+2x^2+2x+4) < 0$$

Le radici razionali di $P_2(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$ sono da ricercare nell'insieme $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

- Per $x = -1$ si ha $P_2(-1) = 1 + 2 + 2 + 4 \neq 0 \implies$ non è una radice
- Per $x = 1$ si ha $P_2(1) = -1 + 2 - 2 + 4 \neq 0 \implies$ non è una radice
- Per $x = -2$ si ha $P_2(1) = -8 + 8 - 4 + 4 = 0 \implies$ è una radice

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & & -2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

da cui la fattorizzazione

$$P(x) = (x-1)^2(x^3+x^2+2x+4) = (x-1)^2(x+2)(x^2+2)$$

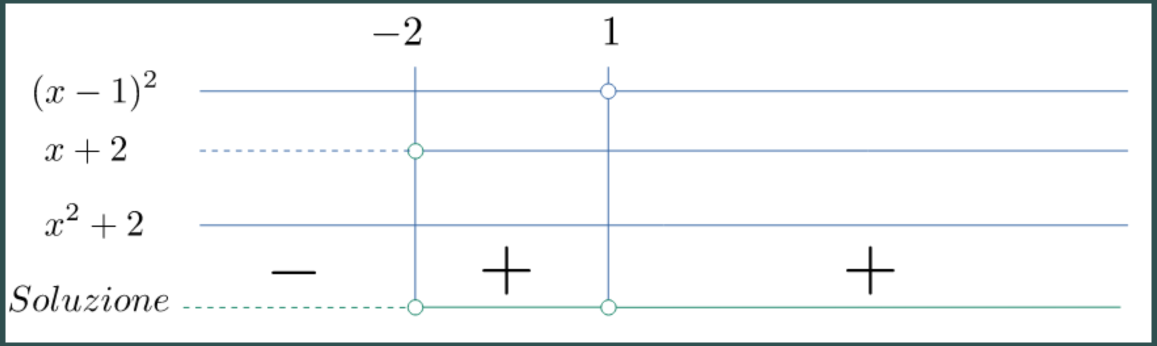
Esempio 2

$$P(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2+2) < 0$$

Soluzione: studio dei segni (da escludere l'uguaglianza)

- $(x-1)^2$ è sempre positivo (per $x = 1$ è zero)
- $(x+2) > 0$ per $x \geqslant -2$ (è zero per $x = -2$)
- $x^2 + 2$ è irriducibile e in questo caso sempre positivo

Soluzione: combinazione dei segni



Soluzione: $\{x < -2\}$


FINE
Manolo Venturin