# Equazioni di grado superiore al secondo

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~
~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Ricerca degli zeri di polinomi
- Legge di annullamento del prodotto per i polinomi
- Teorema delle radici razionali
- Teorema del resto / Ruffini
- Teorema fondamentale dell’algebra e sua conseguenza
- Prodotti notevoli

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

# Indice degli esempi

Calcolare gli zeri di

1. $P(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1) = x^4 - x^2 - 2$
2. $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4$
3. $P(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3) = x^4 - 5x^2 + 6$
4. $P(x) = x^3 - 8x + 3$
5. $P(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x$
6. $P(x) = x^4 - x^2 - 2$

# Ingredienti principali per la ricerca degli zeri di polinomi

1. Legge di annullamento del prodotto
2. Teorema fondamentale dell'algebra
   - fattorizzare tutto in termini di equazioni del I e II grado
3. Teorema delle radici razionali
   - come cercare le radici razionali
4. Teorema del resto / Ruffini
   - per la valutazione di un possibile zero
   - riduzione di grado

# 1: Legge di annullamento del prodotto

Se $a, b$ sono due numeri tali che $a \cdot b = 0$ , allora $a = 0$ o $b = 0$

Nei polinomi si ha

Se

$$P(x) \cdot Q(x) = 0$$

allora

$$P(x) = 0 \quad \text{o} \quad Q(x) = 0$$

# Esempio 1

Gli zeri di

$$P(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 1) = x^4 - x^2 - 2$$

sono dati applicando la legge dell'annullamento del prodotto:

- $x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$
- $x^2 + 1 = 0 \implies \{\emptyset\}$

# 2: Teorema fondamentale dell'algebra e sua conseguenza

> Ogni polinomio di grado $n \geqslant 1$ ammette almeno una radice (o zero) complessa.

**Nota:** Cosa sono i numeri complessi lo vedremo più avanti!

> *Ogni polinomio di grado $n \geqslant 1$ a coefficienti reali si può scomporre nel prodotto di fattori reali di I o II grado*

**Obiettivo**

Fattorizzare tutto in termini di equazioni del I e II grado per poter applicare la legge di annullamento del prodotto

# 3: Teorema delle radici razionali

> Dato il polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ (interi)
>
> **se esiste** una radice razionale, essa è della forma $p/q$ dove:
>
> - $p$ è un divisore di $a_0$ (costante), e
> - $q$ è un divisore di $a_n$ (coefficiente direttore), e

**Nota:**

- Nessuna informazione su eventuali radici irrazionali o complesse
- Tutte le radici possono essere irrazionali

# Esempio 2 (presenza di radici razionali)

Le eventuali radici razionali di $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4$ con

- $a_3 = 3$ con divisori $\{\pm 1, \ \pm 3\}$
- $a_0 = 4$ con divisori $\{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 4\}$

sono da ricercare nell'insieme ($p/q$ con $p$ divisore di $a_0$ e $q$ divisore di $a_n$)

$$\left\{\pm 1, \ \pm \frac{1}{3}, \ \pm 2, \ \pm \frac{2}{3}, \ \pm 4, \pm \frac{4}{3}\right\}$$

Si trova che $x = 2/3$ è radice, infatti sostituendo, si ha:

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{2}{3}\right) + 4 = \frac{8}{9} - \frac{8}{9} - 4 + 4 = 0$$

# Esempio 3 (nessuna radice razionale)

Il polinomio

$$P(x) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 3) = x^4 - 5x^2 + 6$$

con

- $a_4 = 1$ con divisori $\{\pm 1\}$
- $a_0 = 6$ con divisori $\{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6\}$

non ha radici razionali.

Infatti, le radici di $P(x)$ sono

- $x^2 - 2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$
- $x^2 - 3 = 0 \implies x = \pm\sqrt{3}$

Le eventuali radici razionali sarebbero da ricercare nell'insieme $\{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6\}$

# 4: Teorema del resto / Ruffini

> Un polinomio $P(x)$ è divisibile per $(x-a)$ sse il resto è nullo e quindi $P(a)=0$

**Nota:**

- La verifica della divisibilità per $(x-a)$ diventa la valutazione del polinomio in $x=a$, i.e. $P(a)=0$
- Nota la radice $a$ possiamo fattorizzare il polinomio, e quindi ottenere un polinomio di grado inferiore su cui ripetere il procedimento

# Esempio 4 (con riduzione di grado)

Le radici razionali di

$$P(x) = x^3 - 8x + 3$$

sono da ricercare in

$$\{\pm 1, \ \pm 3\}$$

Verifica:

- $x = 1 \implies 1 - 8 + 3 = -4$
- $x = -1 \implies -1 + 8 + 3 = 10$
- $x = 3 \implies 27 - 24 + 3 = 6$
- $x = -3 \implies -27 + 24 + 3 = 0 \implies \big(x - (-3)\big)$ divide $P(x)$

# Esempio 4 (con riduzione di grado)

$$\left(x - (-3)\right) \quad \text{divide} \quad P(x) = x^3 - 8x + 3$$

Con Ruffini si ha

$$\begin{array}{r|rrr|r} & +1 & 0 & -8 & +3 \\ -3 & & -3 & +9 & -3 \\ \hline & +1 & -3 & +1 & 0 \end{array}$$

da cui $P(x) = x^3 - 8x + 3 = \left(x - (-3)\right) \cdot (x^2 - 3x + 1)$

Le radici di $x^2 - 3x + 1 = 0$ sono:

$$x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

# Esempio 4 (con riduzione di grado)

A titolo di esempio, eseguiamo la divisione tra i due polinomi

- $P(x) = x^3 - 8x + 3$ e
- $x - (-3) = x + 3$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | | $-8x$ | $+3$ | $x$ | $+3$ | |
| $-x^3$ | $-3x^2$ | | | $x^2$ | $-3x$ | $+1$ |
| $//$ | $-3x^2$ | $-8x$ | $+3$ | | | |
| | $+3x^2$ | $+9x$ | | | | |
| | $//$ | $x$ | $+3$ | | | |
| | | $-x$ | $-3$ | | | |
| | | $//$ | $//$ | | | |

# Esempi

# Esempio 5

> Calcolare gli zeri e la fattorizzazione di
>
> $$P(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x$$

**Soluzione**

Applicando la legge dell'annullamento del prodotto a

$$2x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x = x\left(2x^3 - x^2 - 5x - 2\right)$$

si ha che $x = 0$ è uno zero.

# Esempio 5

$$2x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x = x\left(2x^3 - x^2 - 5x - 2\right)$$

Gli zeri razionali di $P_1(x) = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$ sono da ricercare in $\left\{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm \frac{1}{2}\right\}$

- per $x = 1 \implies P_1(1) = 2 - 1 - 5 - 2 = -6$
- per $x = -1 \implies P_1(-1) = -2 - 1 + 5 - 2 = 0 \implies \big(x - (-1)\big)$ divide $P_1(x)$

Dividendo con Ruffini si ha

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +2 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & & -2 & 3 & 2 \\ \hline & +2 & -3 & -2 & 0 \end{array} \implies 2x^3 - x^2 - 5x - 2 = (x+1)\left(2x^2 - 3x - 2\right)$$

# Esempio 5

$$2x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x = x(x+1)\left(2x^2 - 3x - 2\right)$$

Gli zeri di $2x^2 - 3x - 2 = 0$ sono

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \left\{2,\ -\frac{1}{2}\right\}$$

con la fattorizzazione

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

La fattorizzazione di $P(x)$ è

$$2x(x+1)(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

# Esempio 6 (con sostituzione di variabile)

> Risolvere (eq. biquadratica)
>
> $$P(x) = x^4 - x^2 - 2 = 0$$

**Soluzione**

Posto $t = x^2$ l'equazione diventa $t^2 - t - 2 = 0$, i.e.

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \{2, \ -1\}$$

- Se $t = 2 \implies x^2 = t\big|_{t=2} \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$
- Se $t = -1 \implies x^2 = t\big|_{t=-1} \implies x = \{\emptyset\}$

# Prodotti notevoli

I prodotti notevoli possono essere utili nel fattorizzare le equazioni polinomiali.

- Quadrato perfetto: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
  - $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$
- Differenza tra quadrati: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
  - $x^4 - 4 = (x^2)^2 - (2)^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$
- Somma / differenza tra cubi: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
  - $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
  - $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$
- Fattore quadratico irriducibile: $a^2 + b^2$ è irriducibile (non si può scomporre)
  - $x^4 + 1 = 0$ non ha soluzioni
  - $-x^6 - 1 = -(x^6 + 1) = -((x^3)^2 + (1)^2) = 0$ non ha soluzioni

# Curiosità

La dimostrazione "più facile" del **teorema fondamentale dell'algebra** è basata sull'analisi complessa con il teorema di Liouville

L'analisi complessa è un terzo corso di Matematica

Come si calcolano le radici di un polinomio?

Si trasforma il problema in un problema agli autovalori!


FINE
Manolo Venturin