Equazioni e disequazioni di II grado

Equazioni e disequazioni polinomiali

Manolo Venturin

~~~ 6 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Equazione di secondo grado
  - due radici reali distinte
  - due radici reali coincidenti
  - nessuna radice reale
- Interpretazione geometrica: parabola
- Disequazione di secondo grado

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esempi

Risolvere

1. $2x^2 + x - 1 = 0$
2. $-x^2 - 2x - 1 = 0$
3. $x^2 + 1 = 0$

Fattorizzare

4. $-4x^2 + 4x - 1 = 0$
5. $x^2 + 1 = 0$
6. $-4x^2 + 4x - 2 = 0$

Studiare le seguenti disequazioni

7. $x^2 - 5x + 6 \lesseqgtr 0$
8. $x^2 - 4x + 4 \lesseqgtr 0$
9. $x^2 - 4x + 5 \lesseqgtr 0$
10. $-x^2 + 5x - 6 \lesseqgtr 0$
11. $-x^2 + 4x - 4 \lesseqgtr 0$
12. $-x^2 + 4x - 6 \lesseqgtr 0$

Equazione di secondo grado (definizione)

L'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

ha soluzione

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Equazione di secondo grado

Dimostrazione

Moltiplico per $4a$ l'equazione:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Aggiungo e tolgo b^2:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

Quadrato di un binomio:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Eseguo radice e isolo x:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discussione delle radici

Posto

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si ha

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Se $\Delta > 0$: due soluzione reali distinte
- Se $\Delta = 0$: due soluzione reali coincidenti
- Se $\Delta < 0$: nessuna soluzione

Esempi

Esempio 1: due radici reali distinte

Calcolare

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Soluzione

$$2x^2 + x - 1 = 0 \implies \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9 > 0$$

Radici: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 2} = \left\{ \frac{1}{2}, \quad -1 \right\}$

Esempio 2: Due radici reali coincidenti

> Calcolare
>
> $$-x^2 - 2x - 1 = 0$$

Soluzione

$$-x^2 - 2x - 1 = 0 \implies \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$$

Radici: $x_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2 \cdot (-1)} = -1$

Esempio 3: Nessuna radice reale

> Calcolare
>
> $$x^2 + 1 = 0$$

Soluzione

$$x^2 + 1 = 0 \implies \Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$$

Infatti, somma di due quadrati sempre positivi

Casi notevoli

Monomia: $b = 0$ **e** $c = 0$

$$ax^2 = 0 \implies x_{1,2} = 0$$

Spuria: $c = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \implies x(ax+b) = 0 \implies x_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Una radice è sempre lo zero

Casi notevoli

Pura: $b = 0$

$$ax^2 + c = 0 \implies x^2 = -\frac{c}{a}$$

- Se $-\frac{c}{a} < 0 \implies$ nessuna soluzione
- Se $-\frac{c}{a} > 0 \implies x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Le radici sono simmetriche rispetto allo zero

Interpretazione geometrica: parabola

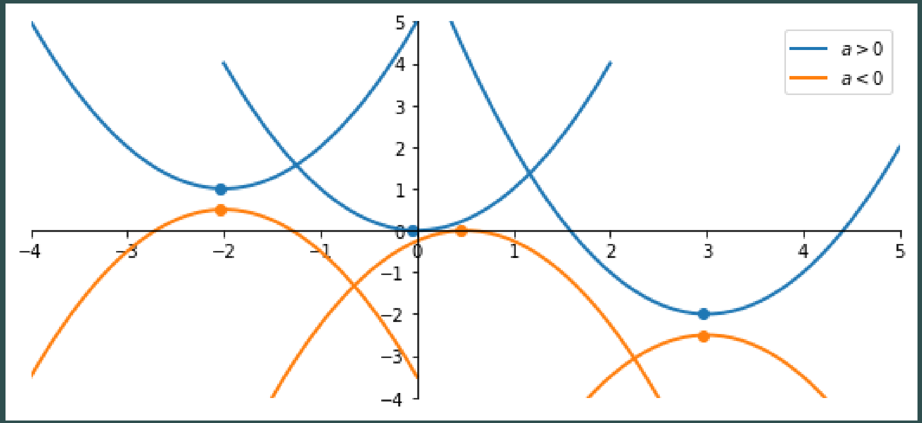
Sia

$$y = ax^2 + bx + c$$

allora

Concavità

- se $a > 0$ verso l’alto
- se $a < 0$ verso il basso



Vertice

- $x_v = -\frac{b}{2a}$
- $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$

Relazioni tra radici e coefficienti

Somma

$$s = x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Prodotto

$$p = x_1 x_2 = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$
$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

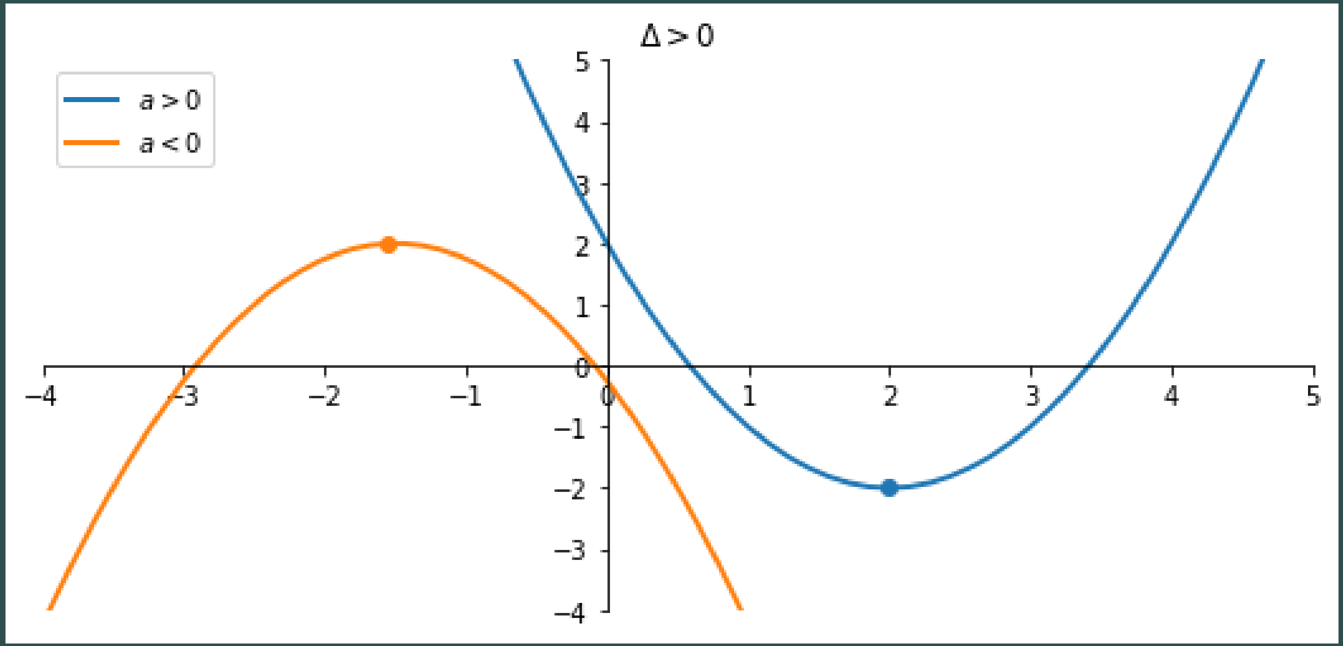
Fattorizzazione

Caso $\Delta > 0$

Date le radici $x_{1,2}$ si ha

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Prodotto di due termini lineari



Esempio

Fattorizzare

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Soluzione

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \left\{ \frac{1}{2}, \ -1 \right\}$$

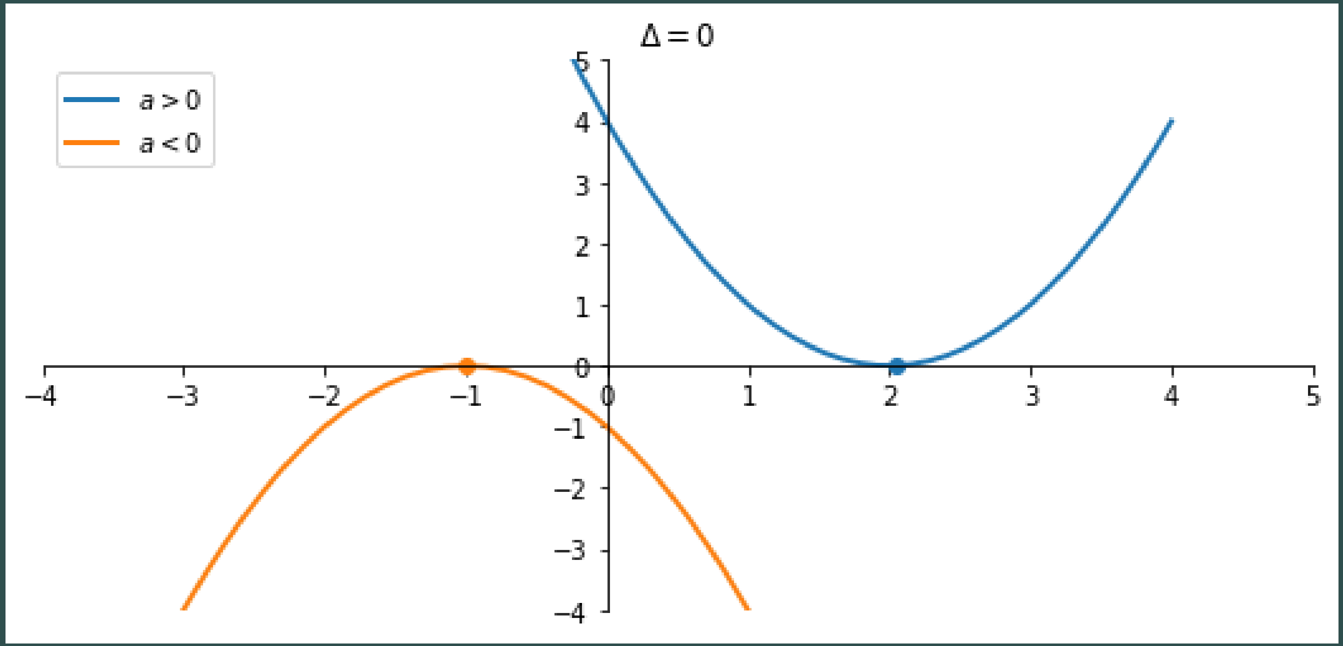
Fattorizzazione: $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1) = (2x-1)(x+1)$

Caso $\Delta = 0$

Date radici coincidenti $x_{1,2} = x_0$ si ha

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2$$

Termine quadratico



Esempio 4

> Fattorizzare
>
> $$-4x^2+4x-1=0$$

Soluzione

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-4)\cdot(-1)}}{2\cdot(-4)}=\frac{-4\pm\sqrt{0}}{-8}=\frac{1}{2}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Fattorizzazione: $-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2=-(2x-1)^2$

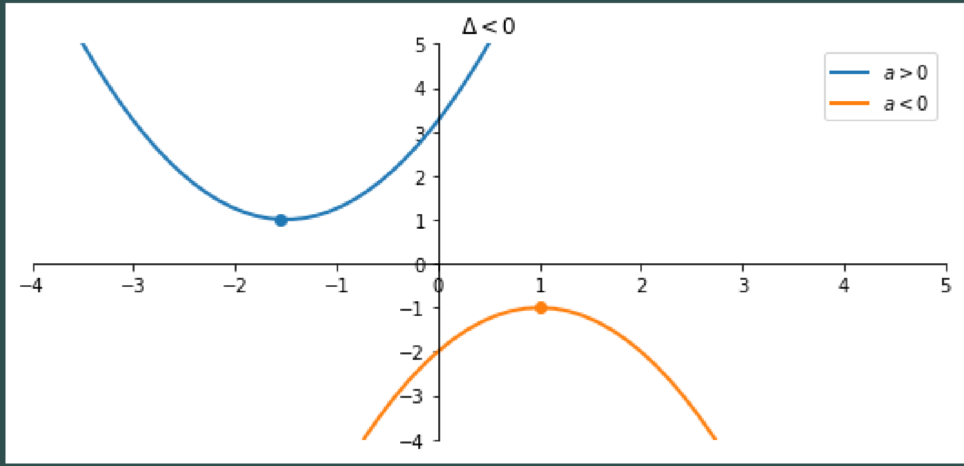
Caso $\Delta < 0$

Dal **completamento del quadrato** nella dimostrazione della formula risolutiva, possiamo scrivere

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}(2ax+b)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Somma di due quadrati sempre positivi o sempre negativi

Il termine $-\frac{b}{2a}$ è x_v, il vertice della parabola



Esempio 5 e 6

Esempio 5: Somma positiva

$x^2 + 1 = 0 \implies \Delta = -4 < 0$

Esempio 6: Somma negativa

$-4x^2 + 4x - 2 = 0 \implies \Delta = 16 - 4(-4)(-2) = -16 < 0$

Da $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-4)} = \frac{1}{2}$ si ha la fattorizzazione

$$-4\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{-16}{4 \cdot 16}\right] = -\left[(2x-1)^2 + 1\right]$$

Senza ricordare la formula basta completare il quadrato, e si ha

$$-4x^2 + 4x - 2 \ = \ -(4x^2 - 4x + 2) \ = \ -\big((2x-1)^2 - 1 + 2\big) \ = \ -\big((2x-1)^2 + 1\big)$$

Disequazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c \lesseqgtr 0, \quad a \neq 0$$

- Approccio per via grafica (veloce)
- Analitico

Approccio per via grafica

1: Disegnare la parabola

- segno di Δ e relative radici $x_{1,2}$ (3 casi)
  - $\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$
- segno di a (2 casi)
  - $a > 0, a < 0$
- Totale casi possibili: 6

2: Individuare la regione di interesse della soluzione:

- $\geqslant, >, =, \neq, <, \leqslant$

Analizziamo i diversi casi possibili

Esempio 7: caso $a > 0$ e $\Delta > 0$

> Studiare
>
> $$x^2 - 5x + 6 \lesseqgtr 0$$

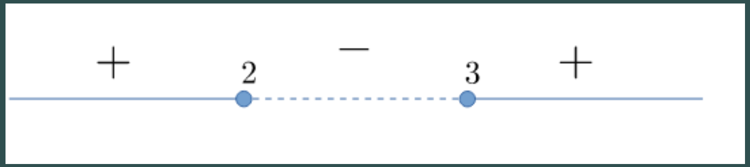
Soluzione

Delta: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

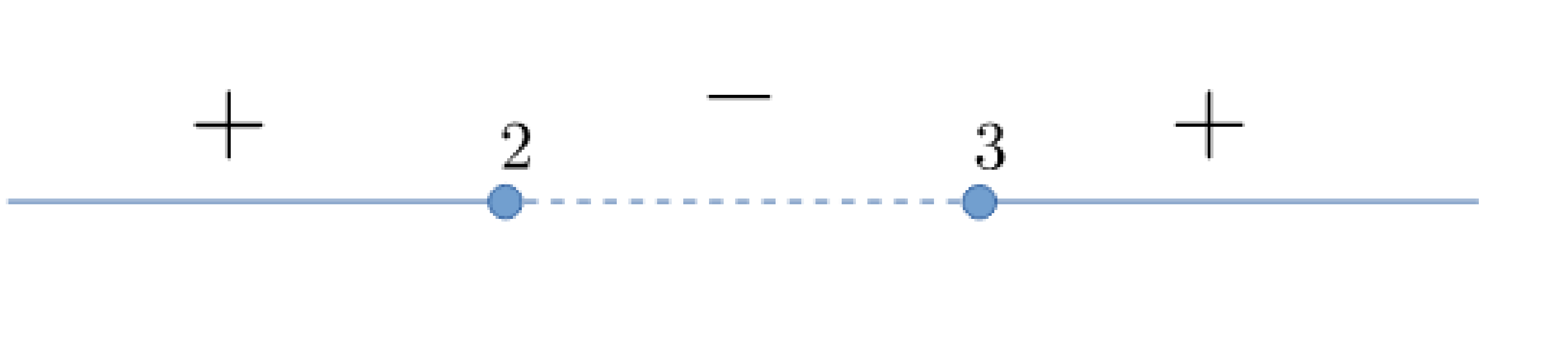
Radici: $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \{2,\ 3\}$

Segno di a: $a > 0$

Eseguo il disegno della parabola e individuo il segno della funzione nelle diverse parti del dominio



Esempio 7: caso $a > 0$ e $\Delta > 0$



- $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0 \implies \{x \leqslant 2\} \vee \{x \geqslant 3\}$ (valori esterni compresi gli zeri)
- $x^2 - 5x + 6 > 0 \implies \{x < 2\} \vee \{x > 3\}$ (valori esterni esclusi gli zeri)
- $x^2 - 5x + 6 = 0 \implies x \in \{2,\ 3\}$ (gli zeri)
- $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \implies x \notin \{2,\ 3\}$ (zeri esclusi)
- $x^2 - 5x + 6 < 0 \implies \{2 < x < 3\}$ (valori interni esclusi gli zeri)
- $x^2 - 5x + 6 \leqslant 0 \implies \{2 \leqslant x \leqslant 3\}$ (valori interni compresi gli zeri)

Esempio 8: caso $a > 0$ e $\Delta = 0$

> Studiare
>
> $$x^2 - 4x + 4 \lesseqgtr 0$$

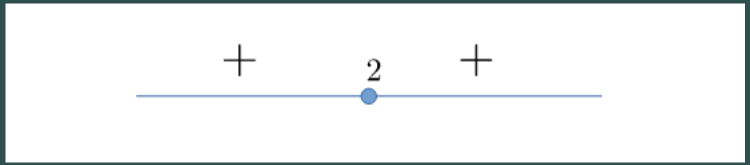
Soluzione

Delta: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

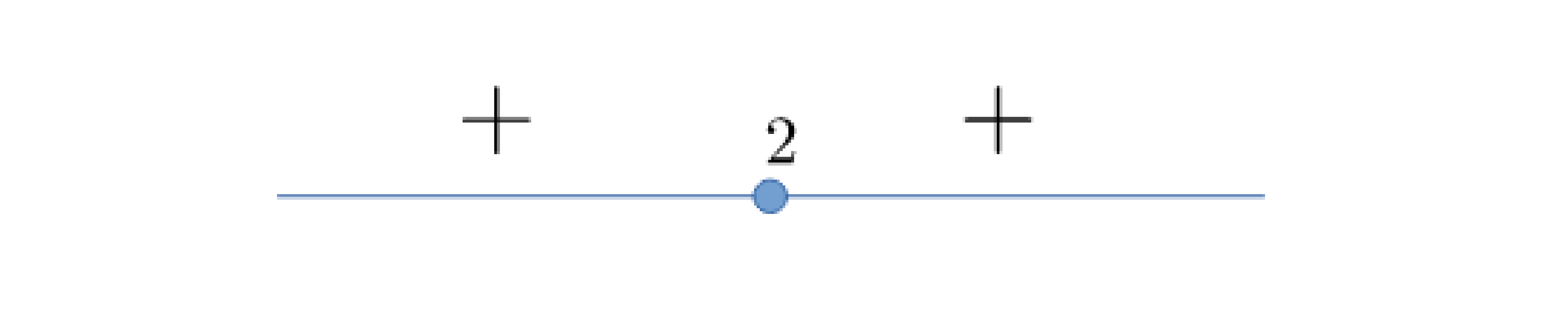
Radici: $x_{1,2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \{2\}$

Segno di a: $a > 0$

Eseguo il disegno della parabola e individuo il segno della funzione nelle diverse parti del dominio



Esempio 8: caso $a > 0$ e $\Delta = 0$



- $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (tutti)
- $x^2 - 4x + 4 > 0 \implies x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (tutti tranne lo zero)
- $x^2 - 4x + 4 = 0 \implies x \in \{2\}$ (lo zero)
- $x^2 - 4x + 4 \neq 0 \implies x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (lo zero escluso)
- $x^2 - 4x + 4 < 0 \implies \{\emptyset\}$ (nessuno)
- $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0 \implies x \in \{2\}$ (solo lo zero)

Esempio 9: caso $a > 0$ e $\Delta < 0$

> Studiare
>
> $$x^2 - 4x + 5 \lesseqgtr 0$$

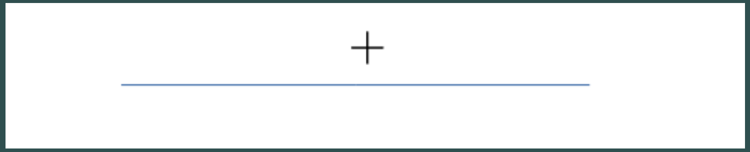
Soluzione

Delta: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4 < 0$

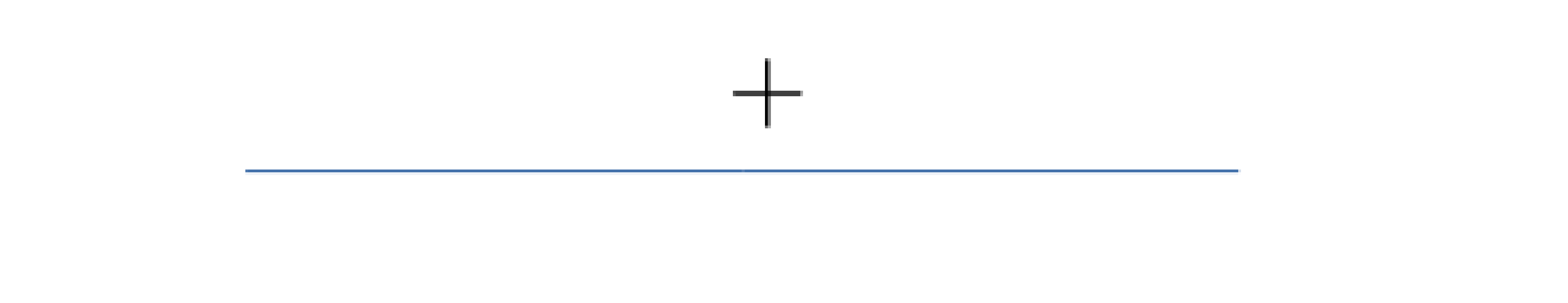
Nessuna radice reale

Segno di a: $a > 0$

Eseguo il disegno della parabola e individuo il segno della funzione nelle diverse parti del dominio



Esempio 9: caso $a > 0$ e $\Delta < 0$



- $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (tutti)
- $x^2 - 4x + 4 > 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (tutti)
- $x^2 - 4x + 4 = 0 \implies \{\emptyset\}$ (nessuno)
- $x^2 - 4x + 4 \neq 0 \implies x \in \mathbb{R}$ (tutti)
- $x^2 - 4x + 4 < 0 \implies \{\emptyset\}$ (nessuno)
- $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0 \implies \{\emptyset\}$ (nessuno)

Caso $a < 0$

Due soluzioni possibili:

1. analoghi ragionamenti come sopra (disegno della parabola diverso)
2. moltiplicare per -1 e cambiare verso alla disuguaglianza

Qui faremo vedere la scelta 1 perché lo studente deve essere veloce nel risolvere le disequazioni di secondo grado

Esempio 10: caso $a < 0$ e $\Delta > 0$

> Studiare
>
> $$-x^2 + 5x - 6 \lesseqgtr 0$$

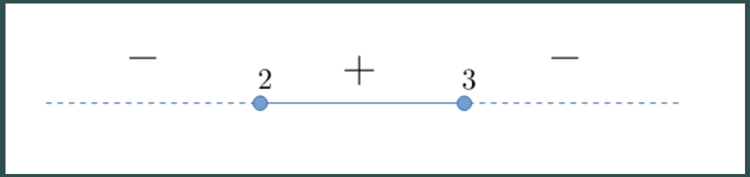
Soluzione

Delta: $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 1 > 0$

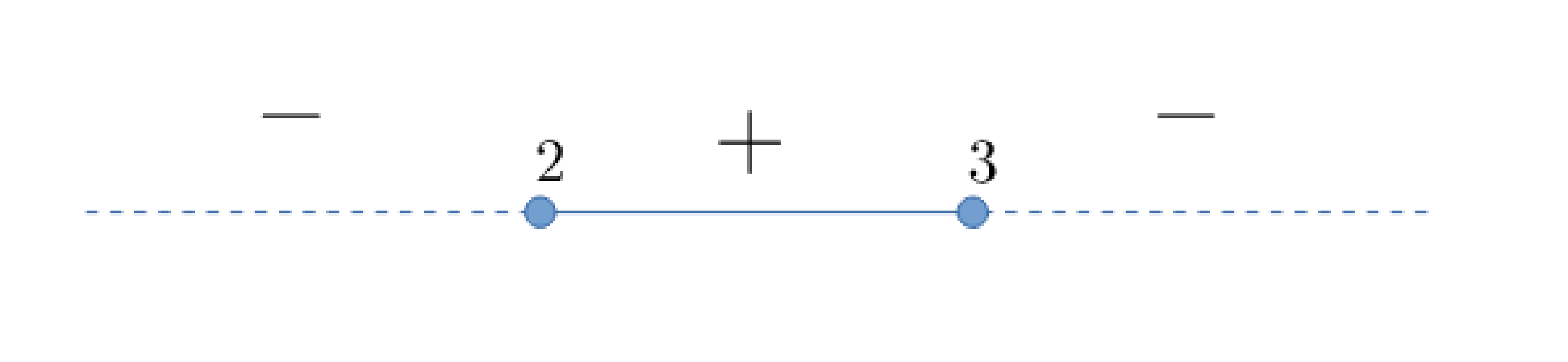
Radici: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} = \{2,\ 3\}$

Segno di a: $a < 0$

Eseguo il disegno della parabola e individuo il segno della funzione nelle diverse parti del dominio



Esempio 10: caso $a < 0$ e $\Delta > 0$



- $-x^2 + 5x - 6 \geqslant 0 \implies \{2 \leqslant x \leqslant 3\}$
- $-x^2 + 5x - 6 > 0 \implies \{2 < x < 3\}$
- $-x^2 + 5x - 6 = 0 \implies x \in \{2,\ 3\}$
- $-x^2 + 5x - 6 \neq 0 \implies x \notin \{2,\ 3\}$
- $-x^2 + 5x - 6 < 0 \implies \{x < 2\} \vee \{x > 3\}$
- $-x^2 + 5x - 6 \leqslant 0 \implies \{x \leqslant 2\} \vee \{x \geqslant 3\}$

Esempio 11: caso $a < 0$ e $\Delta = 0$

> Studiare
>
> $$-x^2 + 4x - 4 \lesseqgtr 0$$

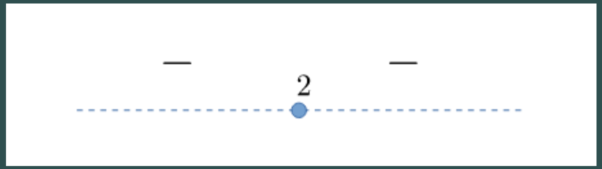
Soluzione

Delta: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0$

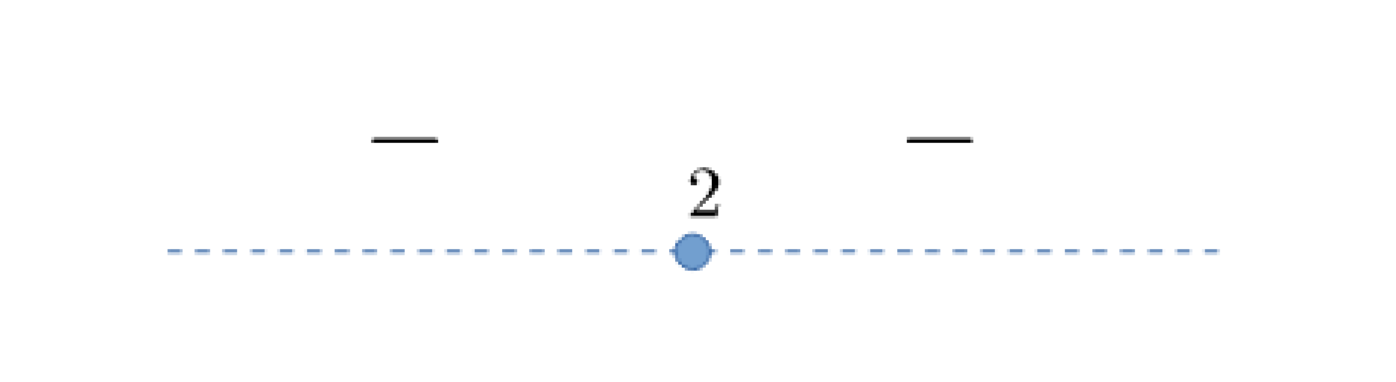
Radici: $x_{1,2} = \frac{-4 \pm 0}{-2} = \{2\}$

Segno di a: $a < 0$

Eseguo il disegno della parabola e individuo il segno della funzione nelle diverse parti del dominio



Esempio 11: caso $a < 0$ e $\Delta = 0$



- $-x^2 + 4x - 4 \geqslant 0 \implies x \in \{2\}$
- $-x^2 + 4x - 4 > 0 \implies \{\emptyset\}$
- $-x^2 + 4x - 4 = 0 \implies x \in \{2\}$
- $-x^2 + 4x - 4 \neq 0 \implies x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $-x^2 + 4x - 4 < 0 \implies x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $-x^2 + 4x - 4 \leqslant 0 \implies x \in \mathbb{R}$

Esempio 12: caso $a < 0$ e $\Delta < 0$

> Studiare
>
> $$-x^2 + 4x - 6 \lesseqgtr 0$$

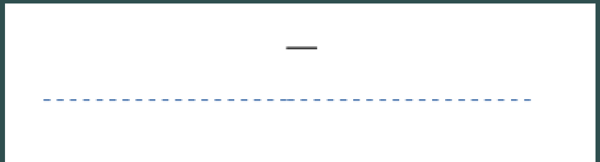
Soluzione

Delta: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = 16 - 24 = -8 < 0$

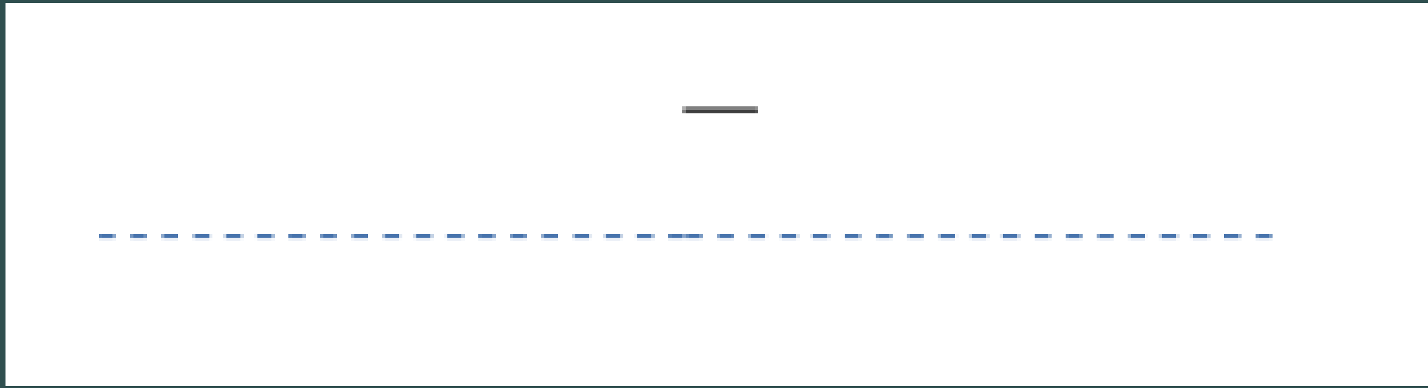
Nessuna radice reale

Segno di a: $a < 0$

Eseguo il disegno della parabola e individuo il segno della funzione nelle diverse parti del dominio



Esempio 12: caso $a < 0$ e $\Delta < 0$



- $-x^2 + 4x - 6 \geqslant 0 \implies \{\emptyset\}$
- $-x^2 + 4x - 6 > 0 \implies \{\emptyset\}$
- $-x^2 + 4x - 6 = 0 \implies \{\emptyset\}$
- $-x^2 + 4x - 6 \neq 0 \implies x \in \mathbb{R}$
- $-x^2 + 4x - 6 < 0 \implies x \in \mathbb{R}$
- $-x^2 + 4x - 6 \leqslant 0 \implies x \in \mathbb{R}$

Approccio per via analitica

L'approccio per via analitica si base sulla fattorizzazione del polinomio e sulla legge dell'annullamento del prodotto

Lo vediamo applicato ai casi di polinomi di grado maggiore del due

Per quelli di grado 2 è più semplice e soprattutto veloce analizzare i casi per via grafica


FINE
Manolo Venturin