Il principio di induzione
Esercizi #4

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Indice esercizi (Analisi Matematica 1)

Usando il principio di induzione dimostrare che

1. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$
2. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$ (esempio con produttoria)
3. $\sqrt[n]{n}\leqslant 2-\frac{1}{n}$ per ogni $n\geqslant 1$ (usare la disugl. di Bernoulli)

Sia data la successione di Fibonacci:

$$1,1,2,3,5,8,\ldots$$

dove $f_1=1$, $f_2=1$ e $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ dimostrare che

4. $f_1+f_2+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$
5. $f_1^2+f_2^2+\cdots+f_n^2=f_n\cdot f_{n+1}$
6. $f_n\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Esercizio 1

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$
>
> per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $n\geqslant 1$

Soluzione

L'espressione può essere riscritta come

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

Esercizio 1

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

- $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{1}{(2\cdot1-1)\cdot(2\cdot1+1)} = \frac{1}{1\cdot3} = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{2\cdot1+1} = \frac{1}{3}$

che sono uguali

Esercizio 1

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&\text{(passo induttivo)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)\cdot(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)}{(2n+3)}
\end{aligned}$$

Esercizio 2

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$$
>
> per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 1$

Soluzione

L'espressione può essere riscritta come

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$$

Esercizio 2

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

- $\prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{1}{k}\right) = 1+\frac{1}{1} = 2$
- $1+1=2$

che sono uguali

Esercizio 2

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \underbrace{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)}_{\text{(passo induttivo)}}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= (n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\\
&= (n+1)+1\\
&= n+2
\end{aligned}$$

Esercizio 3

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\sqrt[n]{n} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$
>
> per ogni $n \geqslant 1$

Soluzione

Si utilizza la disugualianza di Bernoulli

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R},\ x > -1$$

Esercizio 3

Riscriviamo la disuguaglianza

$$\sqrt[n]{n} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

come

$$\sqrt[n]{n} \leqslant 1 + \frac{n-1}{n}$$

Ora, ponendo

$$x = \frac{n-1}{n}$$

si ha $x > -1$ e quindi vale

$$\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{n-1}{n} = n$$

Esercizio 3

$$\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^n \geqslant n$$

Essendo la radice n-esima una funzione crescente si ha (applichiamo la radice ad ambo i membri)

$$1+\frac{n-1}{n} \geqslant \sqrt[n]{n} \iff \sqrt[n]{n} \leqslant 1+\frac{n-1}{n} = 2-\frac{1}{n}$$

Esercizio 4

> Sia data la successione di Fibonacci $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, i.e.
>
> $$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$
>
> dimostrare che
>
> $$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

Soluzione

L'espressione può essere riscritta come

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$$

Esercizio 4

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

- $\sum_{k=1}^{1} f_k = f_1 = 1$
- $f_{1+2} - 1 = 2 - 1 = 1$

che sono uguali

Esercizio 4

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} f_k &= \sum_{k=1}^{n} f_k + f_{n+1} \\ &\text{(passo induttivo)} \\ &= f_{n+2} - 1 + f_{n+1} \\ &= (f_{n+2} + f_{n+1}) - 1 \\ &= f_{n+3} - 1\end{aligned}$$

Esercizio 5

> Sia data la successione di Fibonacci $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, i.e.
>
> $$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$
>
> dimostrare che
>
> $$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Soluzione

L'espressione può essere riscritta come

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Esercizio 5

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

- $\sum_{k=1}^{1} f_k^2 = f_1^2 = 1^2 = 1$
- $f_1 \cdot f_2 = 1 \cdot 1 = 1$

che sono uguali

Esercizio 5

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} f_k^2 = \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + f_{n+1}^2 \\ \text{(passo induttivo)} \\ = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n+1}^2 \\ = f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n+1}) \\ = f_{n+1} \cdot f_{n+2}\end{aligned}$$

Esercizio 6

Sia data la successione di Fibonacci $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ e $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, i.e.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

dimostrare che

$$f_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

Esercizio 6

$$f_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

$$f_1 \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{1-2} \iff 1 \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \iff 1 \geqslant \frac{2}{3}$$

che è verificata

Esercizio 6

$$f_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\
&\quad \text{(passo induttivo)} \\
&\geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \\
&\quad \text{(evidenziamo l'esponente } (n-1)\text{)} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right] = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right] \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \underbrace{\left(\frac{10}{9}\right)}_{>1} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin