Il principio di induzione
Esercizi #3

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Indice esercizi (corso Analisi Matematica 1)

Usando il principio di induzione dimostrare che

1. $n! > 2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 > \frac{n^3}{3}$
3. $(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ e $x > -1$ (disuguaglianza di Bernoulli)
4. $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ (con sugg.)
5. $\sum_{k=0}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=0}^{n} k^p$ con $p \geqslant 1$ (con sugg.)

Gli esercizi 4 e 5 sono molto difficili

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Esercizio 1

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$n! > 2^n$$
>
> per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 4$

Soluzione (passo base)

Per $n = 4$ si ha $4! > 2^4$ è vera perché $24 > 16$

Esercizio 1

$$n! > 2^n$$

Soluzione (passo induttivo)

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n$$

Ora, per $n \geqslant 4$ si ha $n + 1 > 2$ e quindi

$$(n+1)! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Esercizio 2

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\sum_{k=1}^{n} k^2 > \frac{n^3}{3}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 > \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 > \frac{n^3}{3}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \; > \; \frac{n^3}{3} + (n+1)^2 \\
&= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 6n + 3\right) \\
&\quad (\text{completo il cubo}) \\
&= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 3n^2 - 3n - 1 + 3n^2 + 6n + 3\right) \\
&= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 + \underbrace{(3n+2)}_{>0}\right) \; > \; \frac{(n+1)^3}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (disuguaglianza di Bernoulli)

> Sia $x \in \mathbb{R}$ e $x > -1$. Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 0$, si ha

$$(1+x)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \cdot x = 1$$

che risulta vera per ogni $x > -1$

Esercizio 3

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \wedge x \in \mathbb{R},\ x > -1$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&\text{(usando l'ipotesi induttiva si ha)} \\
&\geqslant (1+nx)(1+x) \\
&\geqslant 1+x+nx+nx^2 \\
&\text{(n è un naturale e x^2 un termine positivo per cui $nx^2 \geqslant 0$ quindi)} \\
&\geqslant 1+x+nx \\
&\geqslant 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

Esercizio 4

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$
>
> (suggerimento: induzione su $s = n + k$)

Soluzione (passo base)

Da $s = n + k$ e $s = 0$ si ha $n = k = 0$ quindi

$$\binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1$$

Esercizio 4

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$
>
> (suggerimento: induzione su $s = n + k$)

Nota:

Useremo il principio di induzione nella seconda forma

Soluzione (passo induttivo)

Sia $k \leqslant n$. Dobbiamo dimostrare che $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ con con $s + 1 = n + k$ sapendo per ipotesi induttiva che $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ con $s = n + k$

Esercizio 4

Dalla formula

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

si ha

- $n + k = s + 1$
- $n - 1 + (k - 1) = n + k - 2 = s - 1$
- $n - 1 + k = n + k - 1 = s$

Quindi, per l'ipotesi induttiva abbiamo che $\binom{n-1}{k-1} \in \mathbb{N}$ e $\binom{n-1}{k} \in \mathbb{N}$

Essendo $\binom{n}{k}$ la somma di due naturali è ancora un naturale.

Esercizio 5

> Sia $p \geqslant 1$. Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\sum_{k=0}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=0}^{n} k^p$$

Nota: Questa diseguaglianza sarà chiara quando faremo gli integrali

Suggerimento:

- Per la prima diseguaglianza usare lo sviluppo del binomio di Newton applicato a $(n+1)^{p+1}$ e arrestato ai primi due termini
- Per la seconda diseguaglianza usare: $a^p - b^p = (a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$ e poi dividere per $(n+1)^{p-k}$

Esercizio 5

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ le diseguaglianze diventano

$$\sum_{k=0}^{1-1} k^p < \frac{1^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=0}^{1} k^p \implies 0 < \frac{1}{p+1} < 1$$

che è vera per $p \geqslant 1$

Esercizio 5

Soluzione (passo induttivo): prima diseguaglianza (premessa)

Osserviamo che

$$(n+1)^{p+1} = n^{p+1} + (p+1)n^p + P_{p-1}(n)$$

dove $P_{p-1}(n)$ è un polinomio in n di grado $p-1$ e sempre positivo, i.e.

$$P_{p-1}(n) > 0$$

Quindi si ha

$$(n+1)^{p+1} > n^{p+1} + (p+1)n^p \iff \frac{n^{p+1}}{p+1} + n^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$$

Esercizio 5

Soluzione (passo induttivo): prima diseguaglianza

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^p < \frac{n^{p+1}}{p+1} \quad , \quad \frac{n^{p+1}}{p+1} + n^p < \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^p &= \sum_{k=0}^{n-1} k^p + n^p \\
&\qquad \text{(passo induttivo)} \\
&< \frac{n^{p+1}}{p+1} + n^p \\
&\qquad \text{(diseguaglianza precedente)} \\
&< \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}
\end{aligned}$$

Esercizio 5

Soluzione (passo induttivo): seconda diseguaglianza

Dalla formula $a^p - b^p = (a-b)\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$ e ricordando che $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ si ha

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} = \sum_{k=0}^{p} (n+1)^k n^{p-k}$$

$$\text{divido e moltiplico per } (n+1)^{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} (n+1)^p \left(\frac{n}{n+1}\right)^{p-k} < \sum_{k=0}^{p} (n+1)^p = (p+1)(n+1)^p$$

da cui

$$(n+1)^{p+1} - n^{p+1} < (p+1)(n+1)^p \iff \frac{n^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p > \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$$

Esercizio 5

Soluzione (passo induttivo): seconda diseguaglianza

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} < \sum_{k=0}^{n} k^p \quad , \quad \frac{n^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p > \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^p &= \sum_{k=0}^{n} k^p + (n+1)^p \\
&\qquad \text{(passo induttivo)} \\
&> \frac{n^{p+1}}{p+1} + (n+1)^p \\
&\qquad \text{(diseguaglianza precedente)} \\
&> \frac{(n+1)^{p+1}}{p+1}
\end{aligned}$$

FINE