Il principio di induzione
Esercizi #2

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Indice esercizi
(corso Analisi Matematica 1)

Usando il principio di induzione dimostrare che

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
2. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$
3. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
4. $1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$
5. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Esercizio 1

> Dimostrare per induzione che
>
> $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Soluzione (passo base)

Per $n=1$ si ha

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Esercizio 1

Soluzione (passo induttivo)

Si ha

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)}{(n+2)}
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

> Dimostrare per induzione che
>
> $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

$$1 \cdot 1! = 1 \quad = \quad 2! - 1 = 2 - 1 = 1$$

Esercizio 2

Soluzione (passo induttivo)

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)!\,(1+n+1) - 1 \\ &= (n+2)(n+1)! - 1 \\ &= (n+2)! - 1\end{aligned}$$

Esercizio 3

> Dimostrare per induzione che
>
> $$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad = \quad \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4} = 6$$

Esercizio 3

Soluzione (passo induttivo)

Si ha

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\
&= (n+1)(n+2)(n+3)\left(\frac{n}{4}+1\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

> Dimostrare per induzione che
>
> $$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha

$$1^2 = 1 \quad = \quad (-1)^0 \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Esercizio 4

Soluzione (passo induttivo)

Si ha

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 + (-1)^n(n+1)^2 \\
&= (-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 \\
&= (-1)^n(n+1)\left((-1)\frac{n}{2} + (n+1)\right) \\
&= (-1)^{(n+1)-1}(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \\
&= (-1)^{(n+1)-1}\,\frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

> Dimostrare per induzione che
>
> $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Premessa

L'espressione da dimostrare si può riscrivere come

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 0$ si ha $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} = 1 = 2^0$

Esercizio 5

Soluzione (passo induttivo)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}
\end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin