Il principio di induzione
Esercizi #1

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Indice esercizi
(corso Analisi Matematica 1)

Usando il principio di induzione dimostrare che

1. Somma dei primi $n+1$ numeri dispari vale $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$
2. $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
3. $\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - 2^{-n}$
4. $6^n - 1$ è divisibile per 5
5. Il prodotto di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 6

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Esercizio 1

> Usando il principio di induzione dimostrare che la somma dei primi $n+1$ numeri dispari è il quadrato di un numero naturale e vale
>
> $$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} 1 = 1 = (0+1)^2 = 1$$

Esercizio 1

Somma dei primi $n+1$ numeri dispari vale $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$

Soluzione (passo induttivo)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + (2(n+1)+1) \\
&= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \\
&= \big((n+1)+1\big)^2 \\
&= (n+2)^2
\end{aligned}
$$

Esercizio 2

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 \; = \; \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$$

Esercizio 2

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Esercizio 3

> Usando il principio di induzione dimostrare che
>
> $$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - 2^{-n}$$

Soluzione (passo base)

Per $n = 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{0} 2^{-k} = 2^{0} = 1 \; = \; 2 - 2^{-0} = 2 - 1 = 1$$

Esercizio 3

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2 - 2^{-n}$$

Soluzione (passo induttivo)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} 2^{-k} &= \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} + 2^{-(n+1)} \\
&= 2 - 2^{-n} + 2^{-(n+1)} \\
&= 2 - 2^{-n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 2 - 2^{-n}2^{-1} = 2 - 2^{-n-1} \\
&= 2 - 2^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

Esercizio 4

> Dimostrare per induzione che $6^n - 1$ è divisibile per 5

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha $6 - 1 = 5$ divisibile per 5

Soluzione (passo induttivo)

$6^{n+1} - 1 = 6 \cdot 6^n - 1 = 6^n - 1 + 5 \cdot 6^n$

Per ipotesi $6^n - 1$ è divisibile per 5 e quindi uguale a $5h$ con h opportuno

Quindi, si ha $6^n - 1 + 5 \cdot 6^n = 5h + 5 \cdot 6^n = 5(h + 6^n)$ divisibile per 5

Esercizio 5

> Dimostrare per induzione che il prodotto di tre numeri interi consecutivi è divisibile per 6

Soluzione (passo base)

Per $n = 1$ si ha $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ che è divisibile per 6

Soluzione (passo induttivo)

Dobbiamo dimostrare che

$$(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$$

è divisibile per 6 sapendo che, per ipotesi induttiva,

$$n(n+1)(n+2)$$

è divisibile per 6

Esercizio 5

$(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$ è divisibile per 6 sapendo che $n(n+1)(n+2)$ è divisibile per 6

Per la prima somma, sappiamo che per ipotesi induttiva $n(n+1)(n+2)$ è divisibile per 6, quindi possiamo scrivere

$$n(n+1)(n+2) = 6h$$

con $h \in \mathbb{N}$ opportuno

Per la seconda somma, si ha che il prodotto di due numeri interi consecutivi,

$$(n+1)(n+2) = 2p$$

è un numero pari e quindi uguale a $2p$ con $p \in \mathbb{N}$ opportuno

Esercizio 5

$$n(n+1)(n+2) = 6h$$

$$(n+1)(n+2) = 2p$$

Quindi, si ha

$$n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2) = 6h + 3 \cdot (2p) = 6(h+p)$$

che prova la divisibilità per 6


FINE
Manolo Venturin