Fattoriale, coefficiente binomiale e binomio di Newton

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione ricorsiva di fattoriale
- Definizione di coefficiente binomiale e relative proprietà
- Binomio di Newton
- Dimostrazione tramite induzione del binomio di Newton

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Fattoriale

Definizione (ricorsiva)
Sia $n \in \mathbb{N}$. Si definisce

$$n!$$

il fattoriale di n, come

$$0! = 1$$
$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Esempi

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2 \cdot 1 = 2$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Definizione (non ricorsiva)

Sia $n \in \mathbb{N}$. Si definisce $n!$, il fattoriale di n, come

$$n! = \prod_{i=0}^{n} i$$

Coefficiente binomiale

Definizione
Siano $n,\ k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant n$. Si definisce $\binom{n}{k}$, il coefficiente binomiale di n su k, come

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

E' importante nel binomio di Newton

Esempi

- $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{0!5!} = \frac{\cancel{5!}}{1 \cdot \cancel{5!}} = 1$
- $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!4!} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{1 \cdot \cancel{4!}} = 5$
- $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot \cancel{3!}} = 10$
- $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = 5$
- $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!0!} = 1$

- $\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\cancel{n!}} = 1$
- $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{1!\cancel{(n-1)!}} = n$

Coefficiente binomiale (proprietà)

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$

Esempio

Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k)!}\,\frac{n}{k(n-k)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad = \quad \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Binomio di Newton

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$. Allora

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots$$
$$\cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 \\
&= 1 \cdot a + 1 \cdot b \\
&= a + b
\end{aligned}
$$

Esempio

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1 \\
&= 1\cdot a + 1\cdot b \\
&= a+b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \binom{2}{0}a^2b^0 + \binom{2}{1}a^1b^1 + \binom{2}{2}a^0b^2 \\
&= 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

Esempio

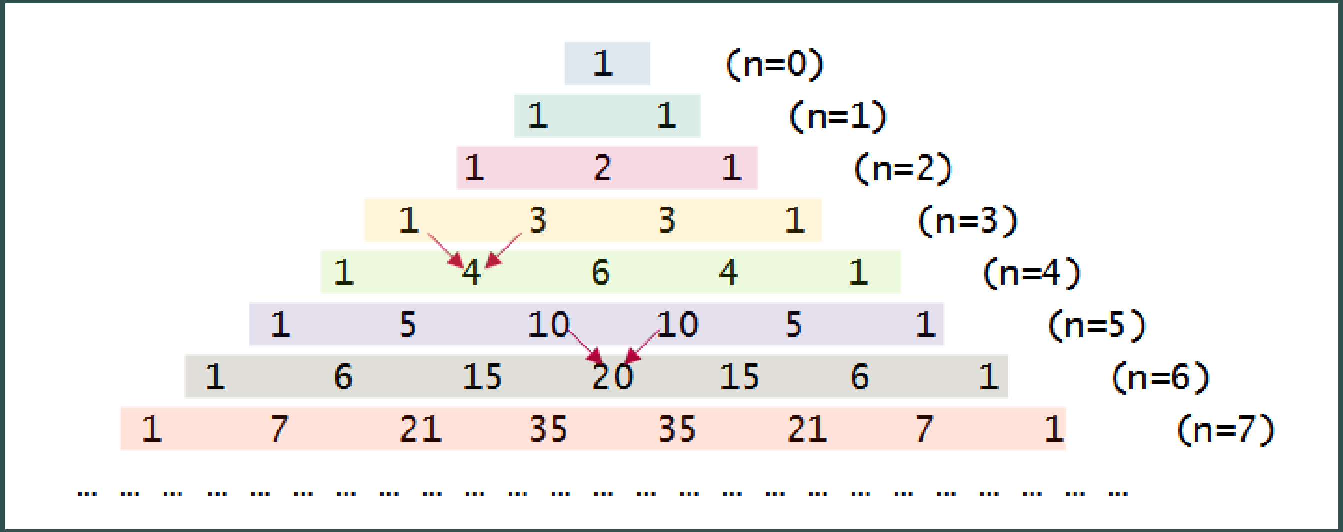
$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 \\
&= 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 \\
&= 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3 \\
&= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3
\end{aligned}
$$

Binomio di Newton

I coefficienti dello sviluppo si ottengono facilmente dal triangolo di Tartaglia. Essi sono legati alle seguenti formule

- limiti sinistro e destro del triangolo: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- Formula ricorsiva per la parte interna: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ che corrisponde a dire che per ottenere il valore del coefficiente binomiale basta somma i suoi due predecessori, come mostrato in figura



Binomio di Newton

Per ottenere lo sviluppo di $(a-b)^n$ si utilizza la formula nella forma $\big(a+(-b)\big)^n$ cioè

$$(a-b)^n = \big(a+(-b)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-b)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Una formula utile (nella dimostrazione delle derivate dei polinomi e non solo) è

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Esempi

$$
\begin{aligned}
(a-b)^1 &= \binom{1}{0} a^1 b^0 - \binom{1}{1} a^0 b^1 \\
&= 1 \cdot a - 1 \cdot b \\
&= a - b
\end{aligned}
$$

Esempi

$$\begin{aligned}(a-b)^1 &= \binom{1}{0}a^1b^0 - \binom{1}{1}a^0b^1 \\ &= 1\cdot a - 1\cdot b \\ &= a-b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 = \big(a+(-b)\big)^2 &= \binom{2}{0}a^2(-b)^0 + \binom{2}{1}a^1(-b)^1 + \binom{2}{2}a^0(-b)^2 \\ &= 1\cdot a^2 - 2\cdot ab + 1\cdot b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Esempi

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 = \big(a+(-b)\big)^2 &= \binom{2}{0}a^2(-b)^0 + \binom{2}{1}a^1(-b)^1 + \binom{2}{2}a^0(-b)^2 \\
&= 1\cdot a^2 - 2\cdot ab + 1\cdot b^2 \\
&= a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a-b)^3 = \big(a+(-b)\big)^3 &= \binom{3}{0}a^3(-b)^0 + \binom{3}{1}a^2(-b)^1 + \binom{3}{2}a^1(-b)^2 + \binom{3}{3}a^0(-b)^3 \\
&= 1\cdot a^3 - 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 - 1\cdot b^3 \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3
\end{aligned}
$$

Esercizio

Applicando la formula $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$ semplificare la seguente espressione

$$\frac{(2+h)^4 - 2^4}{h}$$

Soluzione

$$\frac{(2+h)^4 - 2^4}{h} = \frac{((2+h)-2)}{h}\sum_{k=0}^{4-1}(2+h)^k 2^{4-k-1} = \frac{h}{h}\sum_{k=0}^{3}(2+h)^k 2^{3-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{3}(2+h)^k 2^{3-k} = 2^3 + 2^2(2+h) + 2(2+h)^2 + (2+h)^3$$

Binomio di Newton (dimostrazione)

> Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$. Allora
>
> $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione (per induzione)

Caso iniziale

$$(a+b)^1 = a+b \;=\; \tbinom{1}{0} a^1 b^0 + \tbinom{1}{1} a^0 b^1 = a+b$$

Binomio di Newton (dimostrazione)

Premessa

Useremo la formula

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Binomio di Newton (dimostrazione)

Passo induttivo

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}
\end{aligned}
$$

Binomio di Newton (dimostrazione)

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

Evidenziando il primo e ultimo termine delle due sommatorie ed eseguendo il cambio di variabile $l = k+1$ nella seconda, si ha

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l-1} a^{n+1-l} b^l + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}\end{aligned}$$

Binomio di Newton (dimostrazione)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

Curiosità

La funzione che estende il fattoriale (definito sui naturale) ai reali è la funzione **Gamma** di Eulero

Si ha

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Ad esempio, si ha

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$


FINE
Manolo Venturin