

Principio di induzione

(e la definizione di successione)

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione di successione
- Il principio di induzione
  - Prima forma
  - Seconda forma
- Esempio notevoli con il principio di induzione
  - Progressione aritmetica
  - Progressione geometrica

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Successioni

## Definizione

Se per ogni numero naturale  $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  associamo un elemento dell'insieme  $A$  nell'ordine

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

creiamo una successione e la indicheremo brevemente con la scrittura  $\{a_n\}$

## Nota:

- La successione ha il primo termine  $a_0$ , il secondo termine  $a_1$  e così via
- $a_{i+1}$  è il successore di  $a_i$ , mentre  $a_i$  è il precedente di  $a_{i+1}$

# Esempio: successione costante

$$\{a_n\} = \{a\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- $a_0 = a$
- $a_1 = a$
- $a_2 = a$
- ...

# Esempio

Scrivere i primi elementi della successione (fino a  $a_5$ ):

$$\{a_n\} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

## Soluzione

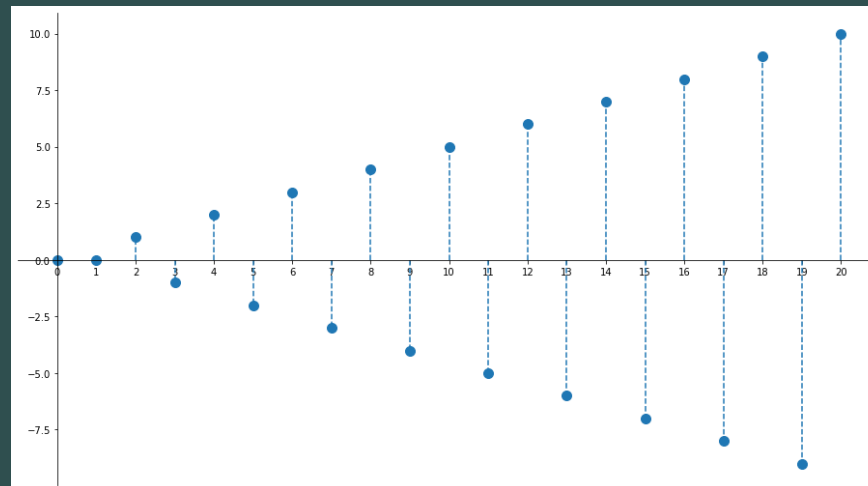
- per  $n = 0 \implies a_0 = 0$
- per  $n = 1 \implies a_1 = 0$
- per  $n = 2 \implies a_2 = 1$
- per  $n = 3 \implies a_3 = -1$
- per  $n = 4 \implies a_4 = 2$
- per  $n = 5 \implies a_5 = -2$

# Esempio

$$\{a_n\} = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si ha

$$\{0, 0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$



# Il principio di induzione

Il principio di induzione si usa per dimostrare la validità delle proposizioni/teoremi che sono della forma:

Dimostrare che per ogni numero naturale vale qualcosa

La cosa principale da osservare è che quel “qualcosa” è formulato sui numeri naturali

# Buon ordinamento di $\mathbb{N}$

Da

- $0 \in \mathcal{S}$
- $\forall n \in \mathcal{S} \implies n + 1 \in \mathcal{S}$

allora

- $\mathcal{S} = \mathbb{N}$

cioè ogni numero naturale ha il suo successore (buon ordinamento)

# Teorema (principio di induzione) [prima forma]

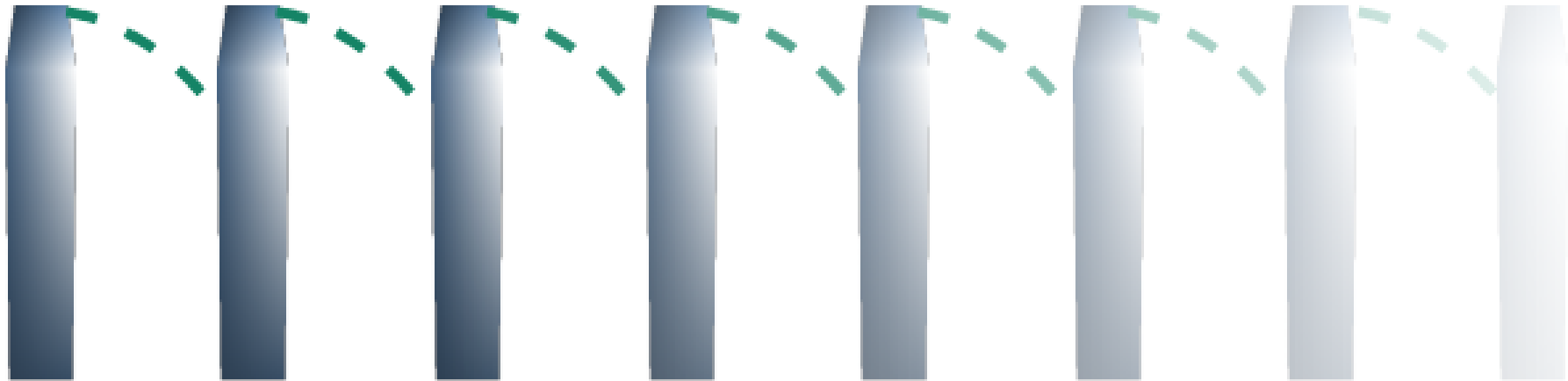
Sia  $P(n)$  un'affermazione che dipende da  $n \in \mathbb{N}$ .

Se

- **Passo base:**  $\mathcal{P}(0)$  è vera
- **Passo induttivo:**  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$   
allora segue la verità di  $\mathcal{P}(n)$  per ogni  $n$ .

# Teorema (principio di induzione) [prima forma]

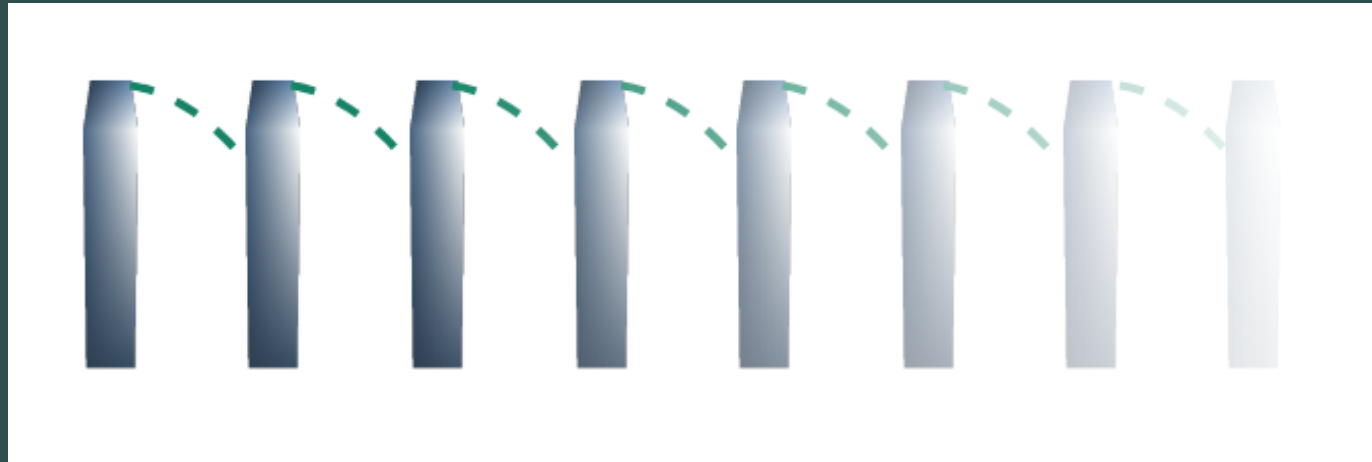
Per capire il principio di induzione graficamente immaginiamo delle tessere del domino disposte in fila e ci chiediamo se cadranno tutte.



# Teorema (principio di induzione) [prima forma]

Il principio di induzione afferma che

1. **Passo base:** posso far cadere la prima tessera del domino;
2. **Passo induttivo:** se le tessere del domino sono disposte in modo tale che, se una qualsiasi di loro cade, cadendo colpisce e fa cadere anche la successiva tessera ho provato che le mie tessere del domino cadranno tutte.



# Teorema (principio di induzione) [prima forma]

Operativamente:

1. **Il passo base** è tipicamente facile perché richiede la verifica della proprietà per il primo punto della sequenza, i.e.  $\mathcal{P}(0)$  è vera (di solito 0 o 1)
2. **Il passo induttivo** è più complicato e richiede di dimostrare la verità di  $\mathcal{P}(n + 1)$  a partire dalla verità di  $\mathcal{P}(n)$ : tipicamente si parte da  $\mathcal{P}(n + 1)$  e attraverso delle manipolazioni algebriche la si riscrive in funzione di  $\mathcal{P}(n)$  e quindi si sfrutta la validità di  $\mathcal{P}(n)$  per provare la validità di  $\mathcal{P}(n + 1)$ .

Tutti questi passaggi saranno più chiari con gli esempi che seguiranno.

# Esempio

Dimostrare che

$$2^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## Soluzione (Passo base)

Per  $n = 0$  si ha  $2^0 = 1 > 0$ .

## Soluzione (Passo induttivo)

Osserviamo che  $2^n \geq 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 = 2^n + 2^n > n + 1$$

che è l'affermazione  $n + 1$ -esima.



# Teorema (principio di induzione) [seconda forma]

Sia  $P(n)$  un'affermazione che dipende da  $n \in \mathbb{N}$ .

Se

- **Passo iniziale:**  $\mathcal{P}(0)$  è vera
- **Passo induttivo:**  $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \dots \wedge \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n+1)$  cioè dalla verità di tutte le affermazioni precedenti a  $\mathcal{P}(n)$  segue la verità di  $\mathcal{P}(n+1)$

## Nota:

- Assume vere tutte le preposizioni da 0 a  $n$  per provare la verità di  $n+1$
- è poco utilizzato negli esercizi

# Esempi

# Esempio: progressione aritmetica

Dimostrare che

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$$

## Dimostrazione (per induzione)

Passo base

$$S(1) = \sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

# Esempio: progressione aritmetica

$$S(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 1$$

Passo induttivo

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\ &= \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{S(n)} + (n+1) \\ &= (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = \underbrace{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}_{S(n+1)} \end{aligned}$$

# Esempio: progressione geometrica

Dimostrare che

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge r \neq 1$$

## Dimostrazione (per induzione)

Passo base (con  $r \neq 1$ )

$$\sum_{i=0}^0 r^i = r^0 = 1 = \frac{1 - r^1}{1 - r} = 1$$

# Esempio: progressione geometrica

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge r \neq 1$$

Passo induttivo (con  $r \neq 1$ )

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} r^i &= \sum_{i=0}^n r^i + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} \\ &= \frac{1 - r^{n+1} + (1 - r)r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1 - \cancel{r^{n+1}} + \cancel{r^{n+1}} - r^{n+2}}{1 - r} \\ &= \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r} \end{aligned}$$



FINE