Esercizi sul valore assoluto

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Indice esercizi (corso Analisi Matematica 1)

Risolvere le seguenti disequazioni con il valore assoluto

1. $|x| > x$
2. $|2 - x| < 1$
3. $|x + 2| < |1 - x|$
4. $|x - 3| < |x + 1|$
5. $|x + 5| > |1 - x|$
6. $\big|1 - |x|\big| < 1$

Studiare

7. $\Big|\Big|\big||x| + x\big| + x\Big| + x\Big|$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Esercizi

Esercizio 1

> Risolvere la seguente disequazione:
>
> $$|x| > x$$

Soluzione

Dalla definizione di valore assoluto si ha

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 1

$$|x| > x$$

Caso: $x \geqslant 0$

Per $x \geqslant 0$ la disequazione diventa

$$x > x$$

e quindi non c'è soluzione

Caso: $x < 0$

Per $x < 0$ la disequazione diventa

$$-x > x \quad \Longrightarrow \quad -2x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x < 0$$

e quindi tutte le $x < 0$ sono soluzione

Esercizio 1

$$|x| > x$$

- Nessuna soluzione per $x \geqslant 0$
- Per $x < 0$ tutte le x sono soluzione

Soluzione finale

Unendo le due soluzioni, l'insieme soluzione $\mathcal{S}$ è:

$$\mathcal{S} = \{x < 0\}$$

Esercizio 2

> Risolvere
>
> $$|2-x|<1$$

Soluzione

Osserviamo che $|2-x|=|x-2|$ (preferisco avere la x con segno positivo)

Posto $t=x-2$, la disequazione diventa $|t|<1$ che ha soluzione $\{-1<t<1\}$

Quindi, si ha:

$$-1<t<1 \implies -1<x-2<1 \implies 1<x<3$$

Esercizio 2

Se non fosse stata eseguita la trasformazione $|2-x|=|x-2|$, la disequazione da risolvere sarebbe stata

$$-1 < 2 - x < 1$$

ovvero

$$-3 < -x < -1$$

i.e.

- $-3 < -x \implies x < 3$
- $-x < -1 \implies x > 1$

che corrisponde a

$$1 < x < 3$$

Esercizio 3

> Risolvere la seguente disequazione:
>
> $$|x+2| < |1-x|$$

Soluzione

Bisogna distinguere diversi casi per eliminare il valore assoluto mettendo il segno corretto positivo o negativo all'espressione al suo interno

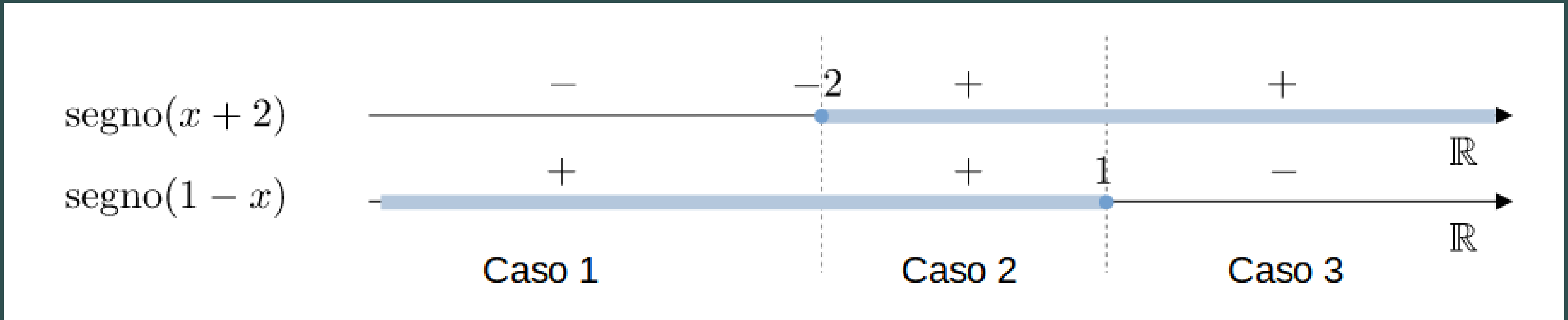
Esercizio 3

$$|x+2| < |1-x|$$

Quindi,

- $x+2 \geqslant 0$ per $x \geqslant -2$
- $1-x \geqslant 0$ per $-x \geqslant -1 \implies x \leqslant 1$

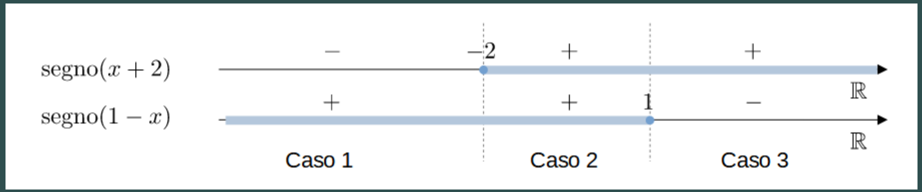
Casi possibili:



Esercizio 3

Bisogna analizzare i seguenti casi:

1. $x \leqslant -2$
    - $x + 2$ ha segno negativo
    - $1 - x$ ha segno positivo
2. $-2 < x \leqslant 1$
    - $x + 2$ ha segno positivo
    - $1 - x$ ha segno positivo
3. $x > 1$
    - $x + 2$ ha segno positivo
    - $1 - x$ ha segno negativo



Esercizio 3

$$|x+2| < |1-x|$$

1. $x \leqslant -2$
   - $x+2$ ha segno negativo
   - $1-x$ ha segno positivo

Caso 1

Per $x \leqslant -2$ la disequazione diventa

$$-(x+2) < 1-x \quad \Longrightarrow \quad -2 < 1$$

che ha soluzione per ogni x (nel dominio di riferimento, i.e. $x \leqslant -2$)

Esercizio 3

$$|x+2| < |1-x|$$

2. $-2 < x \leqslant 1$
   - $x+2$ ha segno positivo
   - $1-x$ ha segno positivo

Caso 2

Per $-2 < x \leqslant 1$ la disequazione diventa

$$(x+2) < 1-x \implies 2x < -1 \implies x \leqslant -\frac{1}{2}$$

che quindi ha soluzione per ogni $-2 < x \leqslant -\frac{1}{2}$

Esercizio 3

$$|x+2| < |1-x|$$

3. $x > 1$
   - $x+2$ ha segno positivo
   - $1-x$ ha segno negativo

Caso 3

Per $x > 1$ la disequazione diventa

$$(x+2) < -(1-x) \implies 2 < -1 \implies x = \emptyset$$

Esercizio 3

- Caso 1: $x \leqslant -2$
- Caso 2: $-2 < x \leqslant -\frac{1}{2}$
- Caso 3: $x = \emptyset$

La soluzione finale si ottiene unendo le singole soluzioni, che diventa:

$$\mathcal{S} = \left\{ x \leqslant -2 \ \vee \ -2 < x \leqslant -\frac{1}{2} \right\} = \left\{ x \leqslant -\frac{1}{2} \right\}$$

Esercizio 4

> Risolvere
>
> $$|x-3| < |x+1|$$

Soluzione

Dobbiamo distinguere i diversi casi

Esercizio 4

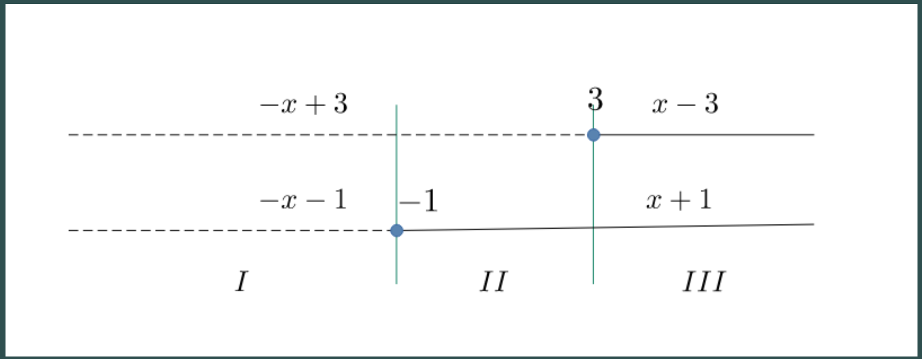
$$|x-3| < |x+1|$$

$$|x-3| = \begin{cases} -(x-3), & x-3<0 \\ x-3, & x-3 \geqslant 0 \end{cases} \implies |x-3| = \begin{cases} -x+3, & x<3 \\ x-3, & x \geqslant 3 \end{cases}$$

$$|x+1| = \begin{cases} -(x+1), & x+1<0 \\ x+1, & x+1 \geqslant 0 \end{cases} \implies |x+1| = \begin{cases} -x-1, & x<-1 \\ x+1, & x \geqslant -1 \end{cases}$$

Casi possibili:

1. $x < -1$
2. $-1 \leqslant x \leqslant 3$
3. $x > 3$



Esercizio 4

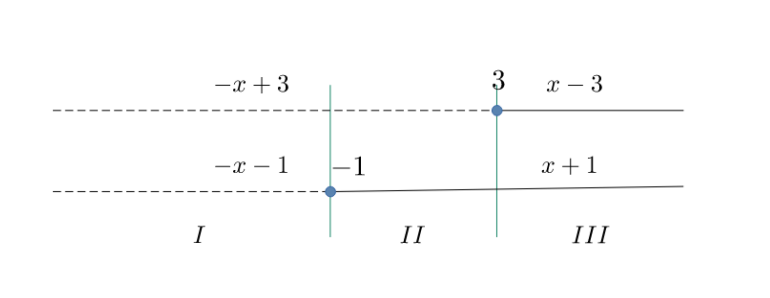
$$|x-3| < |x+1|$$

Caso 1: $x < -1$

$$-x+3 < -x-1 \implies 3 < -1 \implies \{\emptyset\}$$

Caso 2: $-1 \leqslant x \leqslant 3$

$$-x+3 < x+1 \implies x > 1 \implies \{1 < x \leqslant 3\}$$



Caso 3: $x > 3$

$$x-3 < x+1 \implies -3 < 1 \implies \{x > 3\}$$

Soluzione (unione): $x > 1$

Esercizio 5

> Risolvere
>
> $$|x+5| > |1-x|$$

Soluzione

Dobbiamo distinguere i diversi casi

Esercizio 5

$$|x+5| > |1-x|$$

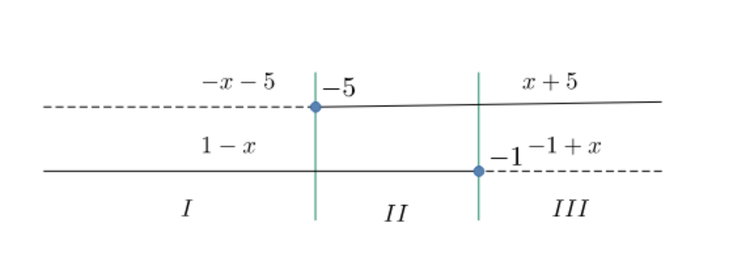
Soluzione

$$|x+5| = \begin{cases} -x-5, & x < -5 \\ x+5, & x \geqslant -5 \end{cases}$$

$$|1-x| = \begin{cases} -1+x, & x \geqslant 1 \\ 1-x, & x \leqslant 1 \end{cases}$$

Casi possibili:

1. $x < -5$
2. $-5 \leqslant x \leqslant -1$
3. $x > -1$

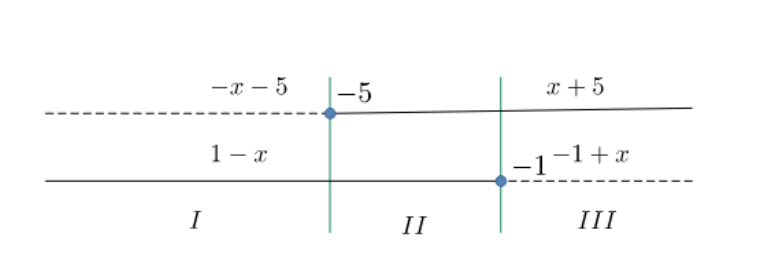


Esercizio 5

$$|x+5| > |1-x|$$

Caso 1: $x < -5$

$$-x-5 > 1-x \implies -5 > 1 \implies \{\emptyset\}$$



Caso 2: $-5 \leqslant x \leqslant -1$

$$x+5 > 1-x \implies x > -2 \implies \{-2 < x \leqslant -1\}$$

Caso 3: $x > -1$

$$x+5 > -1+x \implies 5 > -1 \implies \{x > -1\}$$

Soluzione(unione): $x > -2$

Esercizio 6

> Risolvere la seguente disequazione:
>
> $$\left|1-|x|\right| < 1$$

Soluzione

Eliminiamo il valore assoluto più interno riscrivendo la disequazione come segue (applichiamo la definizione di valore assoluto a $|x|$):

$$\begin{cases} |1-x| < 1, & \text{se } x \geqslant 0 \\ |1+x| < 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 6

Studiamo la prima disequazione

> Studiamo il segno di $1-x$, per $x \geqslant 0$

Si ha

$$1-x \geqslant 0 \implies x \leqslant 1$$

Esercizio 6

- (Disequazione) $|1-x| < 1$ e per $x \geqslant 0$
- (segno) $1-x \geqslant 0 \implies x \leqslant 1$

Quindi, si ha

- per $0 \leqslant x \leqslant 1$ la disequazione diventa

$$1 - x < 1 \implies x > 0$$

  quindi ha soluzione $0 < x \leqslant 1$

- per $x > 1$ (e quindi anche $x \geqslant 0$) la disequazione diventa

$$-(1-x) < 1 \implies x < 2$$

  quindi ha soluzione $1 < x < 2$

Esercizio 6

- (Disequazione) $|1-x|<1$ e per $x \geqslant 0$
- Per $0 \leqslant x \leqslant 1$ si ha $0<x \leqslant 1$
- Per $x>1$ si ha $1<x<2$

Quindi per $x \geqslant 0$ la soluzione è (unendo le due soluzioni precedenti):

$$0<x<2$$

Esercizio 6

Studiamo la seconda disequazione

Si potrebbero fari tutti i conti precedenti con il nuovo caso (fate voi!)

E’ più facile notare che se sostituisco la x con $-x$ la disequazione non cambia

$$\big|1 - |x|\big| < 1$$

Infatti vedremo in seguito che c’è una simmetria pari

Questo porta a dire che la soluzione del secondo caso è

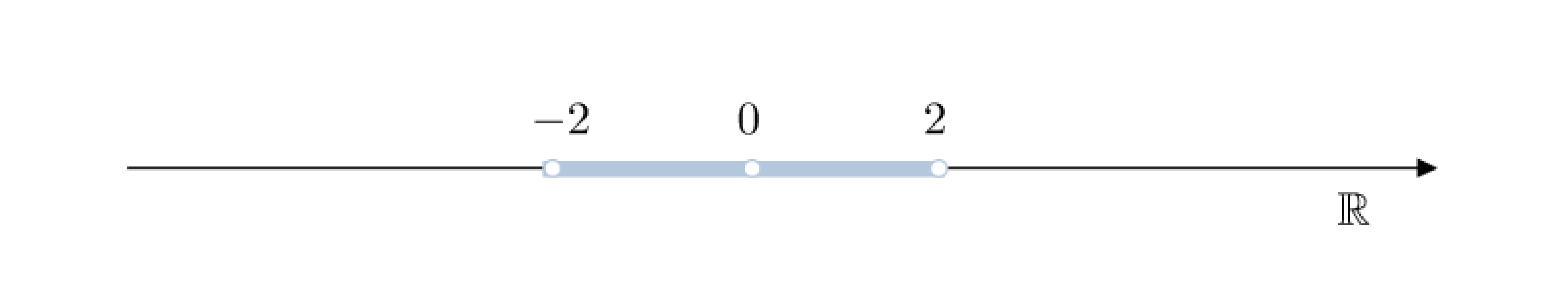
$$-2 < x < 0$$

Esercizio 6

Soluzione finale

La soluzione finale si ottiene unendo le due soluzioni parziali, ottenendo l'insieme

$$\mathcal{S} = \{-2 < x < 0 \ \vee \ 0 < x < 2\}$$



Esercizio 7

Studiare

$$\left|\left|\left|x\right| + x\right| + x\right| + x$$

Soluzione

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$|x| + x = \begin{cases} -x + x = 0, & x < 0 \\ x + x = 2x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\left||x| + x\right| = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Esercizio 7

$$\big||x|+x\big| = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 2x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\big||x|+x\big|+x = \begin{cases} x, & x<0 \\ 3x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Big|\big||x|+x\big|+x\Big| = \begin{cases} -x, & x<0 \\ 3x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Big|\big||x|+x\big|+x\Big|+x = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 4x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\bigg|\Big|\big||x|+x\big|+x\Big|+x\bigg| = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 4x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$


FINE
Manolo Venturin