Il valore assoluto

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione di valore assoluto (o modulo)
- Proprietà del valore assoluto
- disuguaglianze di base con il valore assoluto e loro interpretazione grafica
  - $|x| \leqslant a$
  - $|x| \geqslant a$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

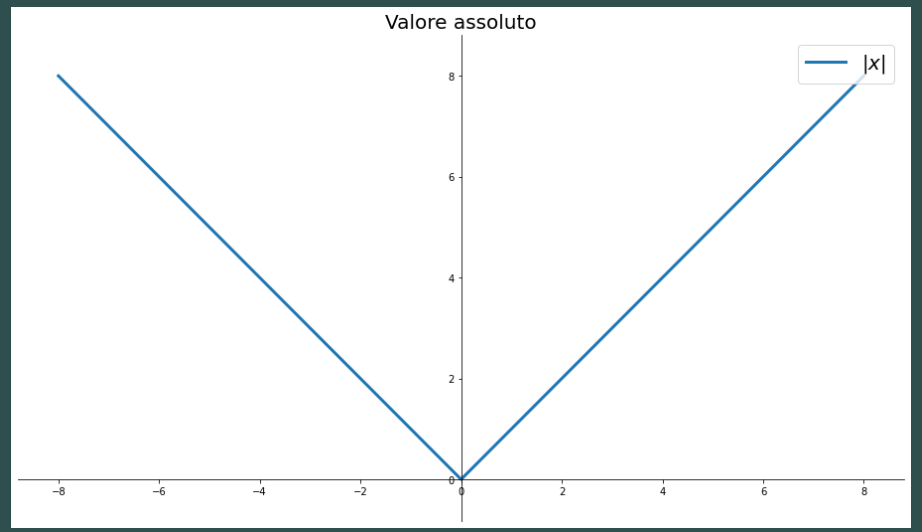
Valore assoluto (o modulo)

Definizione

Il valore assoluto (o modulo) di un numero reale x, è definito come

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Grafico:



Distanza

La quantità

$$|x - y|$$

con $x,\ y \in \mathbb{R}$ prende il nome di distanza tra x e y.

Nota: Il valore assoluto è la distanza di x da 0

Proprietà

Siano a, x, y numeri reali e $a > 0$, allora

- $|x| \geqslant 0$ e $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

- $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$
- $|x| \geqslant a \iff x \leqslant -a \ \vee \ x \geqslant a$

Nota: Se $a < 0$ allora

- $|x| \leqslant a \iff x \in \emptyset$
- $|x| \geqslant a \iff x \in \mathbb{R}$

Proprietà

- Disuguaglianza triangolare:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

- Nella dis. triangolare il segno di uguale vale solo se $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$
- Disuguaglianza triangolare inversa:

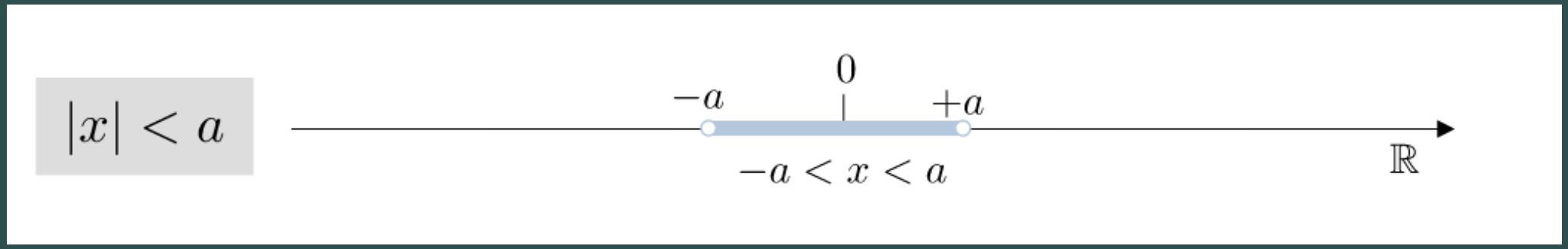
$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$$

Nota: $\sqrt{x^2} = |x|$ (alcuni autori definiscono il valore assoluto in questo modo)

Interpretazione grafica delle diseguaglianze base

Si ha che $|x| < a$, corrisponde a

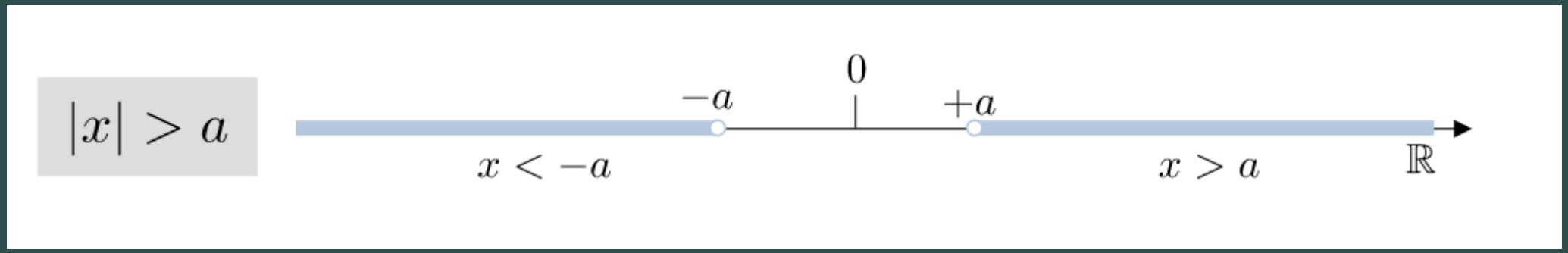
$$-a < x < a$$



Interpretazione grafica delle diseguaglianze base

Si ha che $|x| > a$, corrisponde a

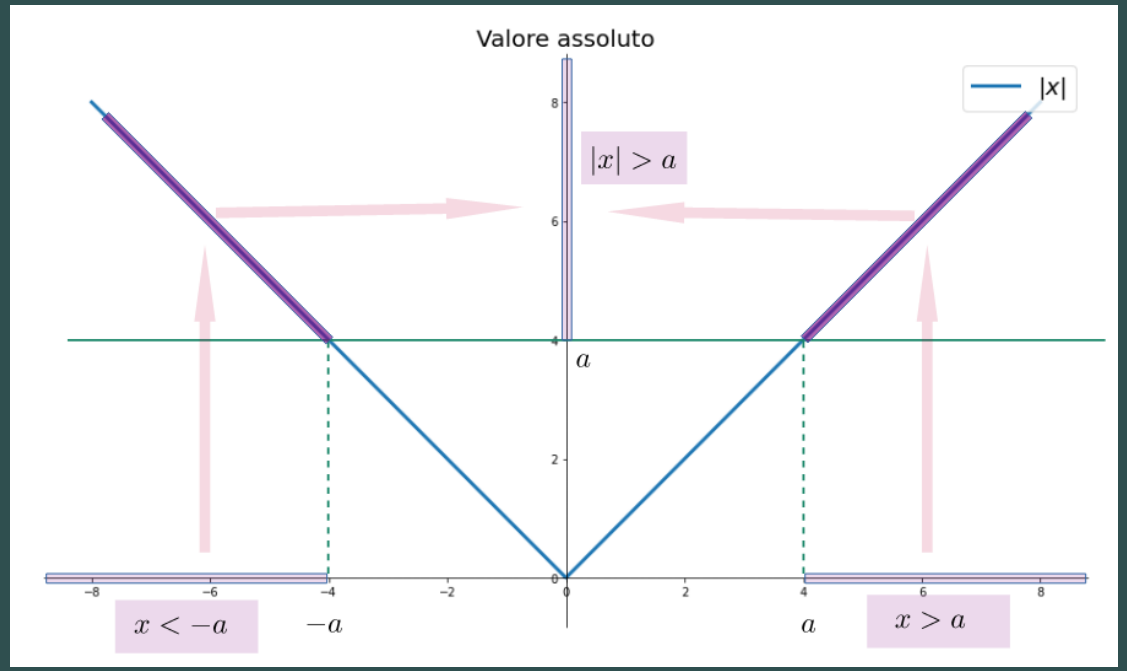
$$x < -a \ \vee \ x > a$$



Interpretazione grafica delle diseguaglianze base

Interpretazione della disuguaglianza $|x| > a$ attraverso il grafico della funzione

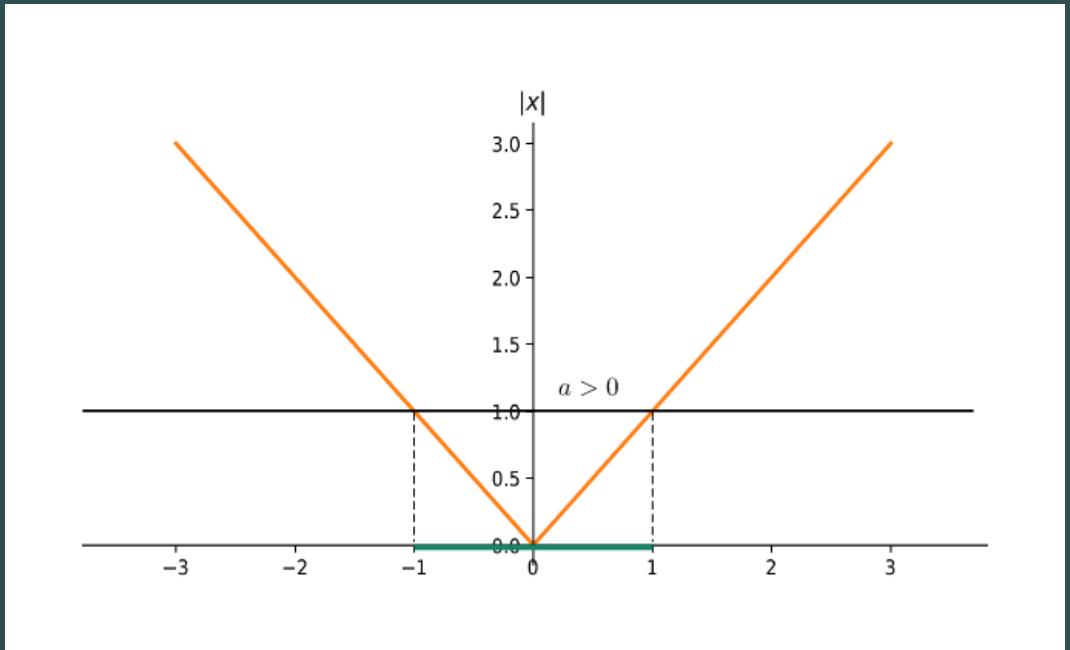
Valori esterni per avere un valore assoluto maggiore di a



Disequazioni base (in dettaglio)

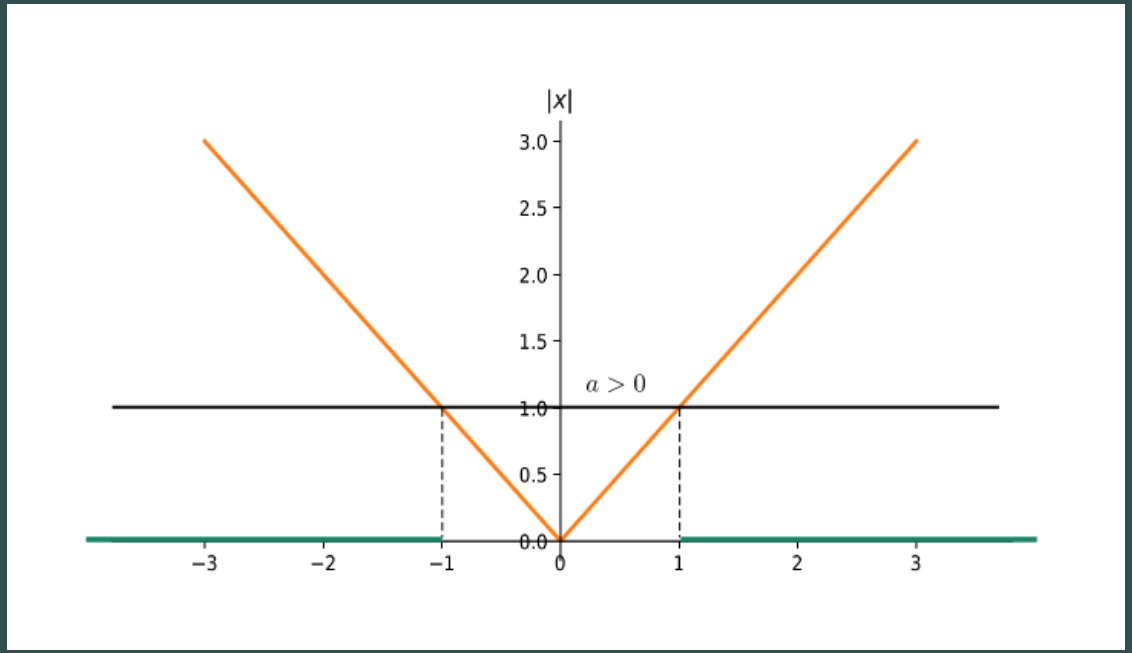
Studiamo $|x| \leqslant a$

- se $a < 0 \implies \{\emptyset\}$
- se $a = 0 \implies \{0\}$
- se $a > 0 \implies \{-a < x < a\} = (a,\ a)$
- se $a \geqslant 0 \implies \{-a \leqslant x \leqslant a\} = [a,\ a]$



Studiamo $|x| \geqslant a$

- se $a < 0 \implies \mathbb{R}$
- se $a = 0 \implies \mathbb{R}$
- se $a > 0 \implies \{x < -a\} \vee \{x > a\} = (-\infty,\ a) \vee (a,\ +\infty)$
- se $a \geqslant 0 \implies \{x \leqslant a\} \vee \{x \geqslant a\} = (-\infty,\ a] \vee [a,\ +\infty)$



FINE