I numeri reali e i reali estesi

Insiemi numerici

Manolo Venturin

~~~ 4 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione di numero reale per via assiomatica
- Ordinamento nei reali
- Assioma di Dedekind
- Regole di calcolo nei reali
  - Legge di annullamento del prodotto
- Densità dei reali
- Definizionr di numero reale esteso

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Assiomi dei numeri reali

> **Definizione per via assiomatica (regole primitive non dimostrabili)**

Esistono diverse formalizzazioni tra loro equivalenti, qui ne riportiamo una

In $\mathbb{R}$ sono definite:

- due operazioni
  - una detta somma "$+$" e
  - l'altra detta moltiplicazione "$\cdot$"
- e una relazione d'ordine "$<$" che verificano le seguenti proprietà (assiomi)

Assiomi dei numeri reali

Siano a, b e c tre numeri appartenenti a $\mathbb{R}$, allora

- Proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- Proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assiomi dei numeri reali

- Esistenza degli elementi neutri, 0 per l'addizione e 1 per la moltiplicazione, tali che:

$$a + 0 = a$$
$$a \cdot 1 = a$$

- Esistenza dell'opposto rispetto l'elemento neutro dell'addizione:

$$a + (-a) = 0$$

- Esistenza dell'inverso rispetto l'elemento neutro della moltiplicazione, se $a \neq 0$ si ha:

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

  dove a^{-1} si indica anche con $\frac{1}{a}$

- Proprietà distributiva della moltiplicazione verso l'addizione:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Assiomi dei numeri reali

- Legge di tricotomia: ovvero dati due numeri a e b vale solo una delle seguenti possibilità:

$$a < b \quad , \quad a > b \quad , \quad a = b$$

- Transitiva dell'ordinamento:

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ b < c \end{array}\right\} \implies a < c$$

- Compatibilità dell'ordinamento rispetto alla somma:

$$a < b \implies a + c < b + c$$

- Compatibilità dell'ordinamento rispetto al prodotto:

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c > 0 \end{array}\right\} \implies a \cdot c < b \cdot c$$

Ordinamento

Per l'ordinamento abbiamo:

$$a \leqslant b \iff a < b \ \vee \ a = b$$

i.e.

$$a < b \iff a \leqslant b \ \wedge \ a \neq b$$

Inoltre, si ha

$$a \geqslant b \iff b \leqslant a$$

Assioma di Dedekind

Gli assiomi precedenti non sono sufficienti a caratterizzare completamente $\mathbb{R}$

Assioma di separazione

Se A e $B \neq \emptyset$ tali che $a \leqslant b$ per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$, allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leqslant x \leqslant b$$

Teorema di buona definizione di $\mathbb{R}$

Esiste ed è unico un insieme $\mathbb{R}$ che verifica gli assiomi precedentemente elencati. Inoltre $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e le operazione di $\mathbb{Q}$ (somma, prodotto, ordinamento totale) su $\mathbb{R}$ sono coerenti con quelle di $\mathbb{Q}$.

Regole di calcolo

Discendono dagli assiomi le classiche regole di calcolo usate per semplificare le espressioni:

1. Moltiplicazione per zero:

$$a \cdot 0 = 0$$

2. Regole dei segni:

$$(-a) \cdot b = -a \cdot b \quad \text{e} \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

3. L'opposto dell'opposto è il numero di partenza:

$$-(-a) = a$$

Regole di calcolo

4. Semplificazione rispetto alla somma:

$$a + b = a + c \implies b = c$$

5. Semplificazione rispetto al prodotto:

$$a \cdot b = a \cdot c \implies b = c, \quad \text{se } a \neq 0$$

6. L'opposto è unico

7. L'inverso (di un numero diverso da 0) è unico

Regole di calcolo

8. Cambio di segno della diseguaglianza:

$$a > 0 \implies -a < 0$$

9. Regola di cambio di segno nelle disequazioni:

$$a \leqslant b \text{ e } c \geqslant 0 \implies a \cdot c \leqslant b \cdot c$$
$$a \leqslant b \text{ e } c \leqslant 0 \implies a \cdot c \geqslant b \cdot c$$

Regole di calcolo

10. Il quadrato di un numero è positivo:

$$a^2 > 0$$

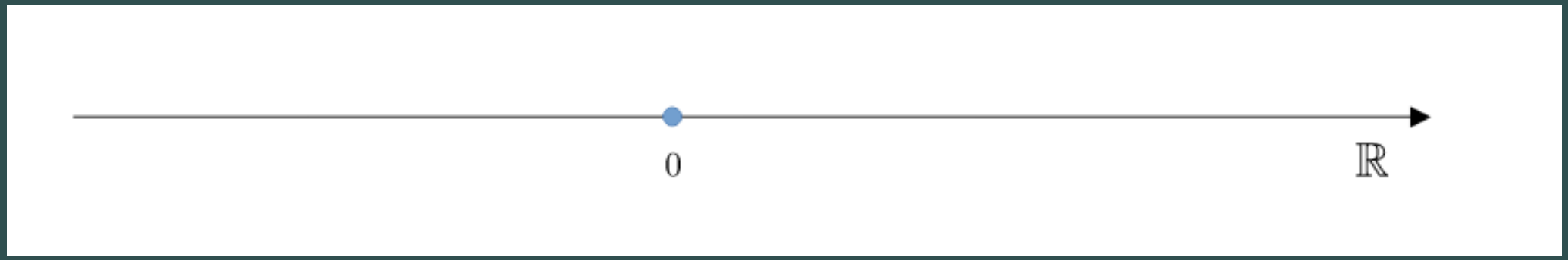
e $a^2 = 0 \iff a = 0$

11. Legge **annullamento del prodotto**: se $a \cdot b = 0$ sse $a = 0$ o $b = 0$

Il punto 11 spiega perché non possiamo dividere per 0, cioè non esiste l'inverso dello zero. Per l'assioma dell'esistenza degli inversi si avrebbe $0 \cdot 0^{-1} = 1$ che è in contraddizione con la legge dell'annullamento del prodotto $0 \cdot 0^{-1} = 0$.

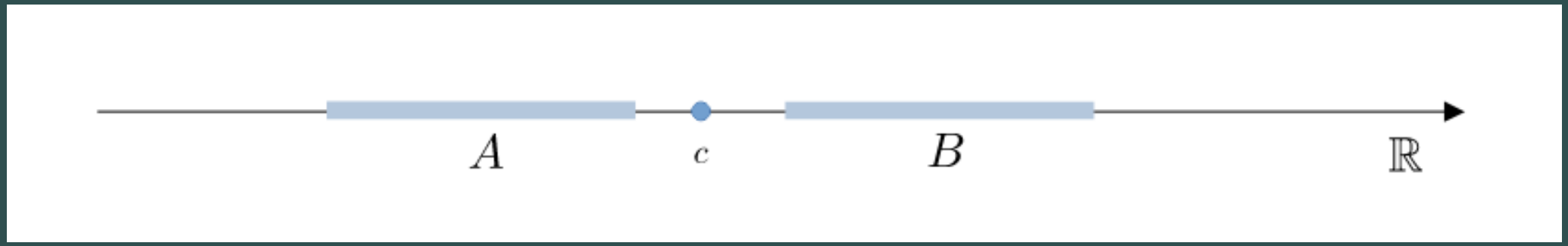
I numeri reali: conseguenze

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Le operazioni di somma, prodotto e ordinamento totale su $\mathbb{R}$ sono coerenti con quelle di $\mathbb{Q}$
- E' possibile rappresentare $\mathbb{R}$ geometricamente con una retta orientata



Assioma di Dedekind (interpretazione grafica)

Permette di avere una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti della retta e i numeri reali (continuo di punti)



E' importante notare che $\mathbb{Q}$ non verifica l'assioma di Dedekind.

L'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}:\ x^2 < 2\}$ ha come estremo superiore $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Altre proprietà

Proprietà di Archimede

Per ogni $x,\ y \in \mathbb{R}$ con $x, y > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$

Parte intera

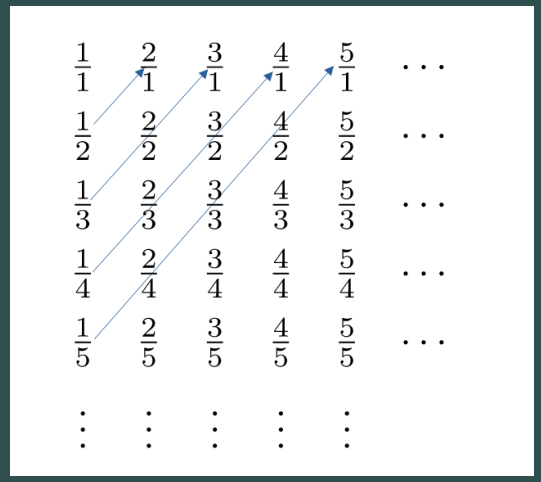
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico $n \in \mathbb{Z}$ tale che

$$n \leqslant x < n + 1$$

n viene indicato con $\lfloor x \rfloor$ (si legge parte bassa)

Densità

- $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato
- $\mathbb{Z}$ è superiormente e inferiormente illimitato
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- Gli insiemi dei razionali $\mathbb{Q}$
  - non è completo (es. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)
  - è numerabile (corrispondenza biunivoca con i numeri naturali, come da figura)



Densità

- Gli insiemi dei razionali è
  - denso nei reali
    - $\{x \in \mathbb{R}\colon\ a < x < b,\ a < b\} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$
  - posso approssimare un numero reale tramite un numero razionale con precisione grande a piacere
    - per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $\sup\{x \in \mathbb{Q}\colon\ x < a\} = a$ (approx. per eccesso)
    - per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $\inf\{x \in \mathbb{Q}\colon\ x > a\} = a$ (approx. per difetto)

Reali estesi (definizione)

Conviene, per semplificare le notazioni future, introdurre i numeri reali estesi, ovvero introdurre un simbolo per un numero arbitrariamente (infinitamente) grande e il suo opposto, i.e.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

dove i simboli $-\infty$ e $+\infty$ indicano due oggetti che supporremo tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ -\infty < x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}: \ x < +\infty$$

Capire l’assioma di Dedekind

> Il numero $0.999\ldots$ e 1 rappresentano lo stesso numero reale

L’assioma di Dedekind sostanzialmente dice che: “tra due numeri reali diversi riesco sempre a scrivere un numero reale che stia in mezzo e li separi”

Provate a trovare un numero che separi $0.\overline{9}$ e 1

Una spiegazione alternativa di questo fatto lo vedremo quando parleremo delle successioni

Curiosità

- Il tappare i buchi dei razionali con i reali è dovuto a Cauchy (con le sue successioni) e poi da Cantor e Dedekind
- La necessità dei reali rispetto ai razionali è necessaria al calcolo infinitesimale che fu inventato Newton e Leibniz
- Ora il calcolo infinitesimale si chiama analisi matematica
- Il tappare i buchi si traduce nel dire che i numeri reali sono uno “spazio metrico completo”

FINE