

Funzioni elementari

Parte II

*(Potenza con esponente intero pari e dispari / Radice di esponente intero pari e dispari /
Potenza con esponente razionale)*

Funzioni elementi base

Manolo Venturin

~~~ 5 ~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Potenza con esponente intero pari e dispari
- Radice di esponente intero pari e dispari
- Potenza con esponente razionale

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

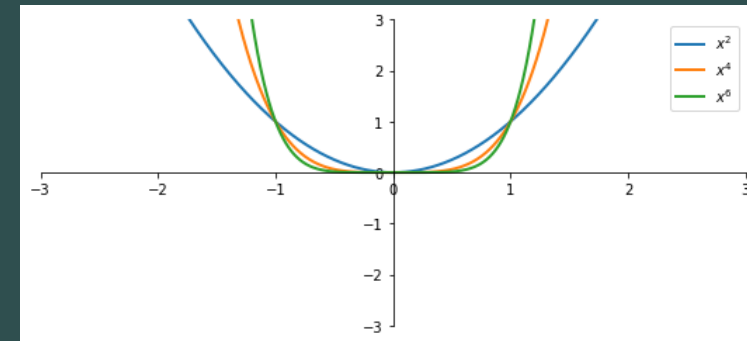


# Potenza con esponente intero pari

$$f(x) = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

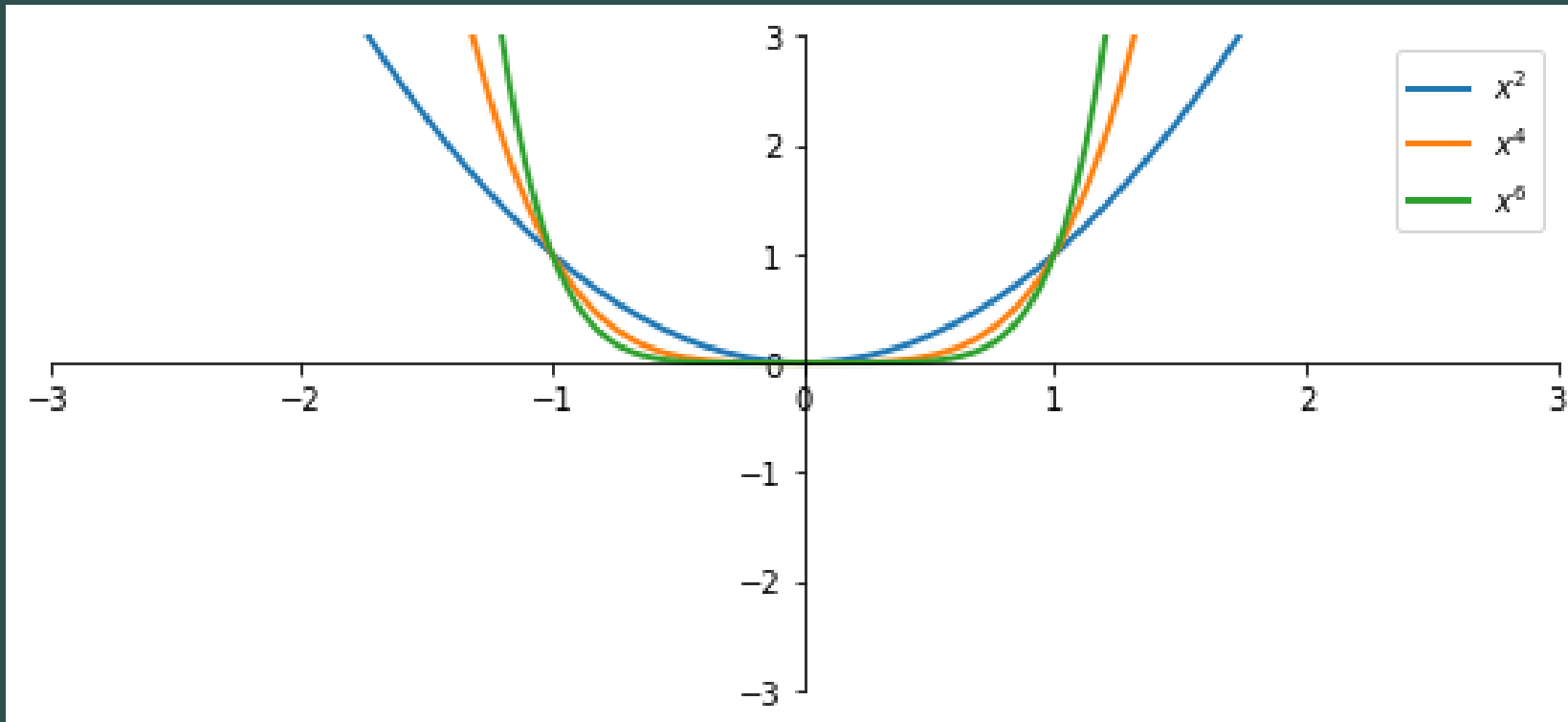
## Proprietà:

- Pari
- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Codominio:  $[0, +\infty)$
- Strettamente crescente su  $[0, +\infty)$   
(e ivi invertibile)
- Strettamente decrescente su  $(-\infty, 0]$
- Per  $0 \leq x \leq 1$  si ha  $x^{2(n+1)} \leq x^{2n}$
- Per  $x \geq 1$  si ha  $x^{2(n+1)} \geq x^{2n}$



# Potenza con esponente intero pari

$$f(x) = x^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

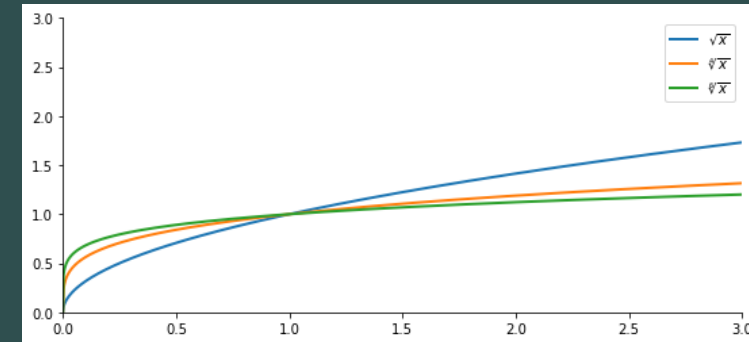


# Radice di esponente pari

$$f(x) = \sqrt[2n]{x} = x^{\frac{1}{2n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

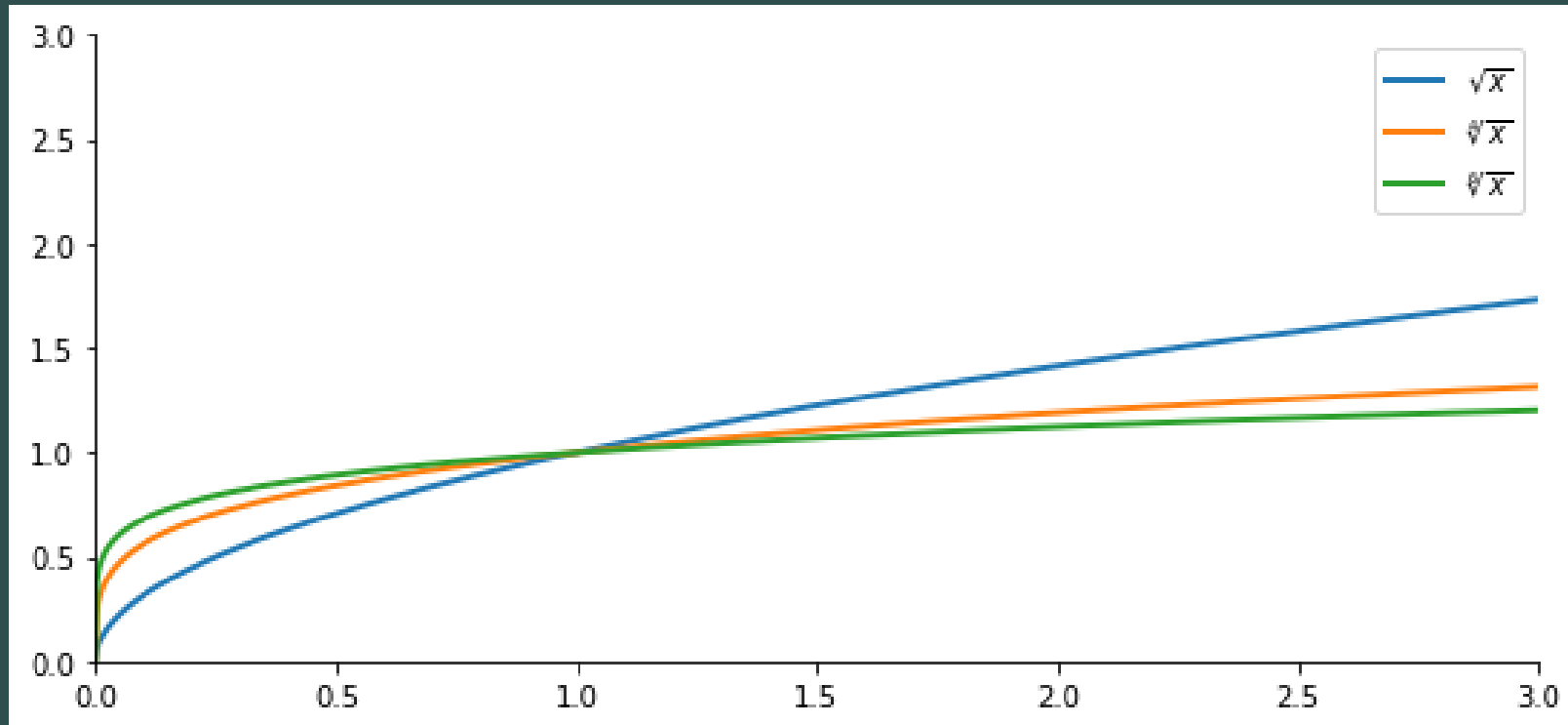
## Proprietà:

- E' definita come l'inversa di  $x^{2n}$  per  $x \in [0, +\infty)$  (strettamente crescente, quindi iniettiva)
- Dominio:  $[0, +\infty)$
- Codominio:  $[0, +\infty)$
- Strettamente crescente
- Per  $0 \leq x \leq 1$  si ha  $\sqrt[2n+2]{x} \geq \sqrt[2n]{x}$
- Per  $x \geq 1$  si ha  $\sqrt[2n+2]{x} \leq \sqrt[2n]{x}$



# Radice di esponente pari

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

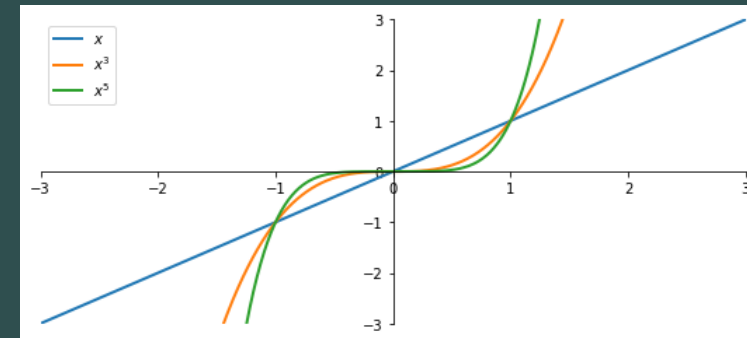


# Potenza con esponente naturale dispari

$$f(x) = x^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

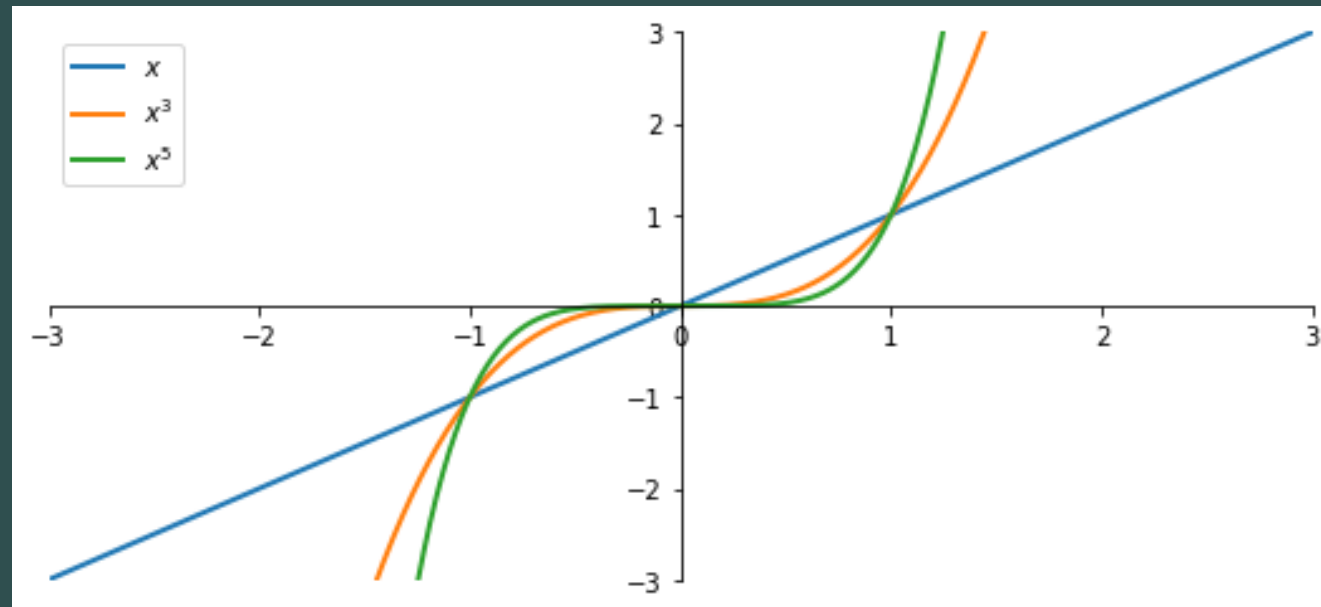
## Proprietà:

- Dispari
- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Codominio:  $\mathbb{R}$
- Iniettiva e suriettiva
- Strettamente crescente
- Per  $0 \leq x \leq 1$  si ha  $x^{2n+3} \leq x^{2n+1}$
- Per  $x \geq 1$  si ha  $x^{2n+3} \geq x^{2n+1}$



# Potenza con esponente naturale dispari

$$f(x) = x^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

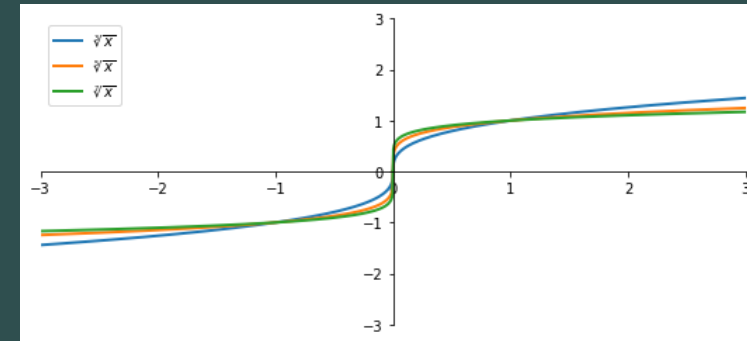


# Radice di esponente dispari

$$f(x) = \sqrt[2n+1]{x} = x^{\frac{1}{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

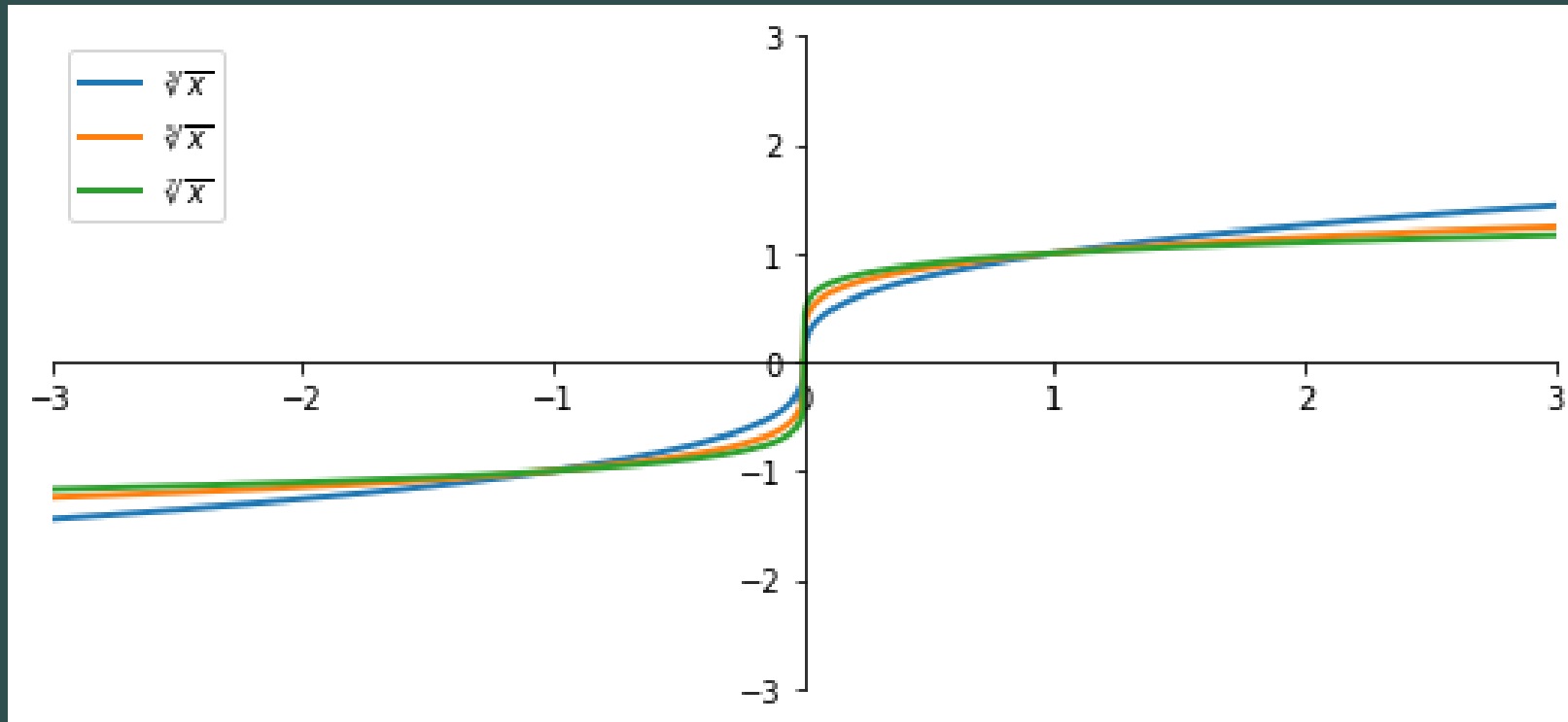
## Proprietà:

- E' definita come l'inversa di  $x^{2n+1}$   
(strettamente crescente, quindi iniettiva)
- Dominio:  $\mathbb{R}$
- Codominio:  $\mathbb{R}$
- Strettamente crescente
- Per  $0 \leq x \leq 1$  si ha  $\sqrt[2n+3]{x} \geq \sqrt[2n+1]{x}$
- Per  $x \geq 1$  si ha  $\sqrt[2n+3]{x} \leq \sqrt[2n+1]{x}$



# Radice di esponente dispari

$$f(x) = \sqrt[2n+1]{x} = x^{\frac{1}{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

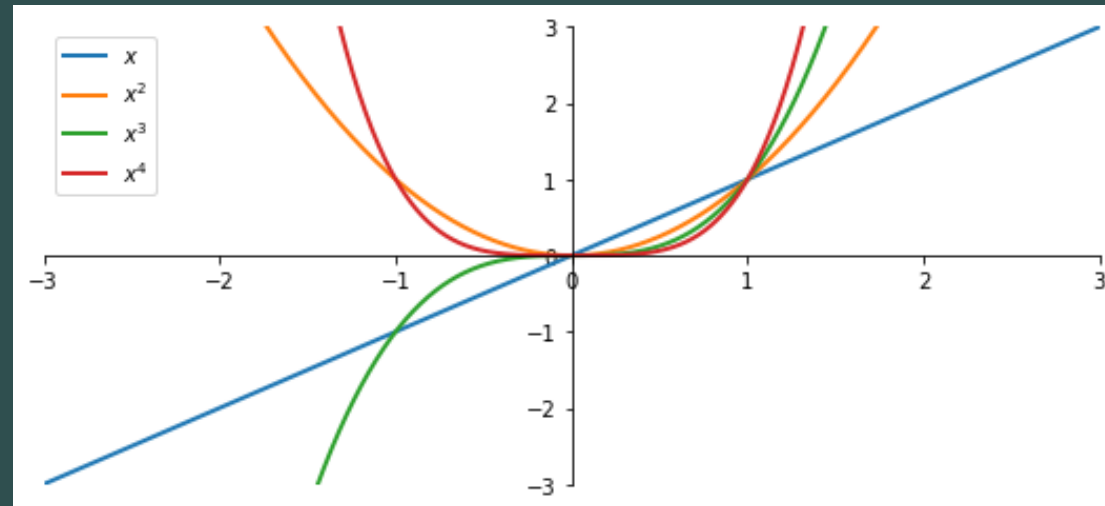


# Potenze pari e dispari

$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

## Proprietà:

- Per  $0 \leq x \leq 1$  si ha  $x^{n+1} \leq x^n$
- Per  $x \geq 1$  si ha  $x^{n+1} \geq x^n$

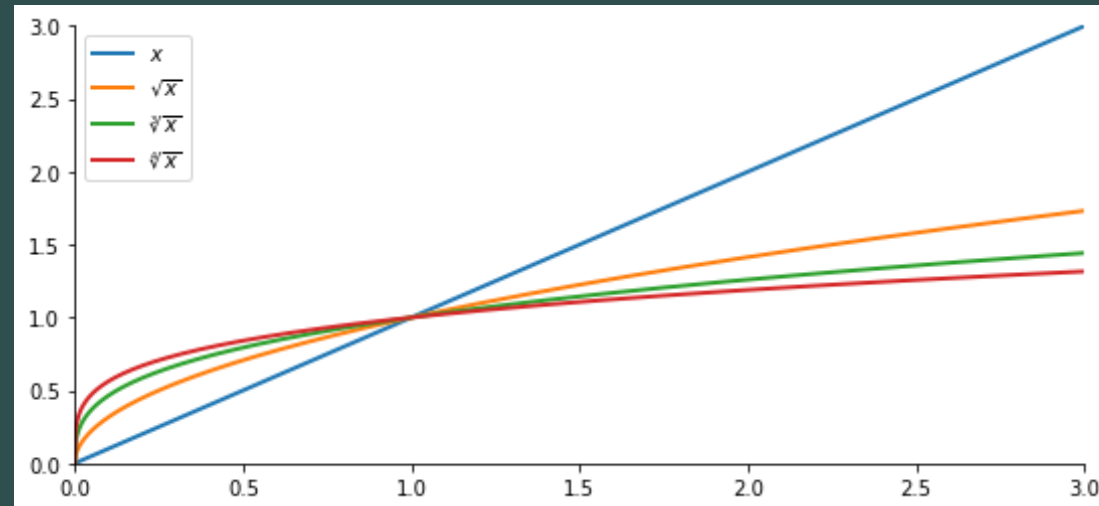


# Radici pari e dispari

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

## Proprietà:

- Per  $0 \leq x \leq 1$  si ha  $\sqrt[n+1]{x} \geq \sqrt[n]{x}$
- Per  $x \geq 1$  si ha  $\sqrt[n+1]{x} \leq \sqrt[n]{x}$



# Convenzione per le radici

Ci sono due convenzioni:

## Convenzione della radice reale

- Dominio per le radici pari:  $[0, +\infty)$
- Dominio per le radici dispari:  $\mathbb{R}$

Qui ha senso scrivere  $\sqrt[3]{-27} = -3$

## Convenzione della radice principale

- Dominio  $[0, +\infty)$  per tutte le radici sia pari che dispari

Qui bisogna dare un'interpretazione di  $\sqrt[3]{-27} = 3\sqrt[3]{-1}$  (richiede la conoscenza dei numeri complessi)

**Noi useremo la seconda convenzione (radice principale)!**

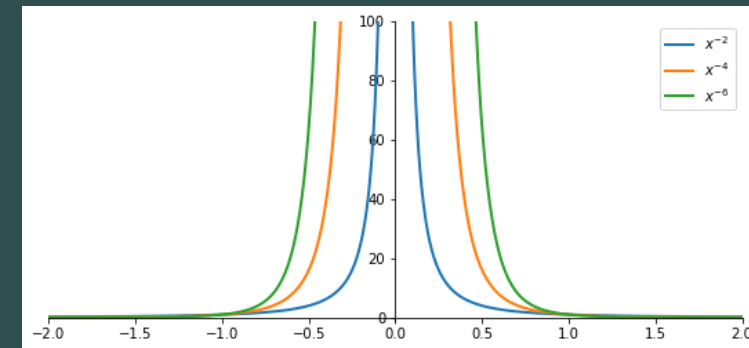


# Potenza con esponente intero negativo pari

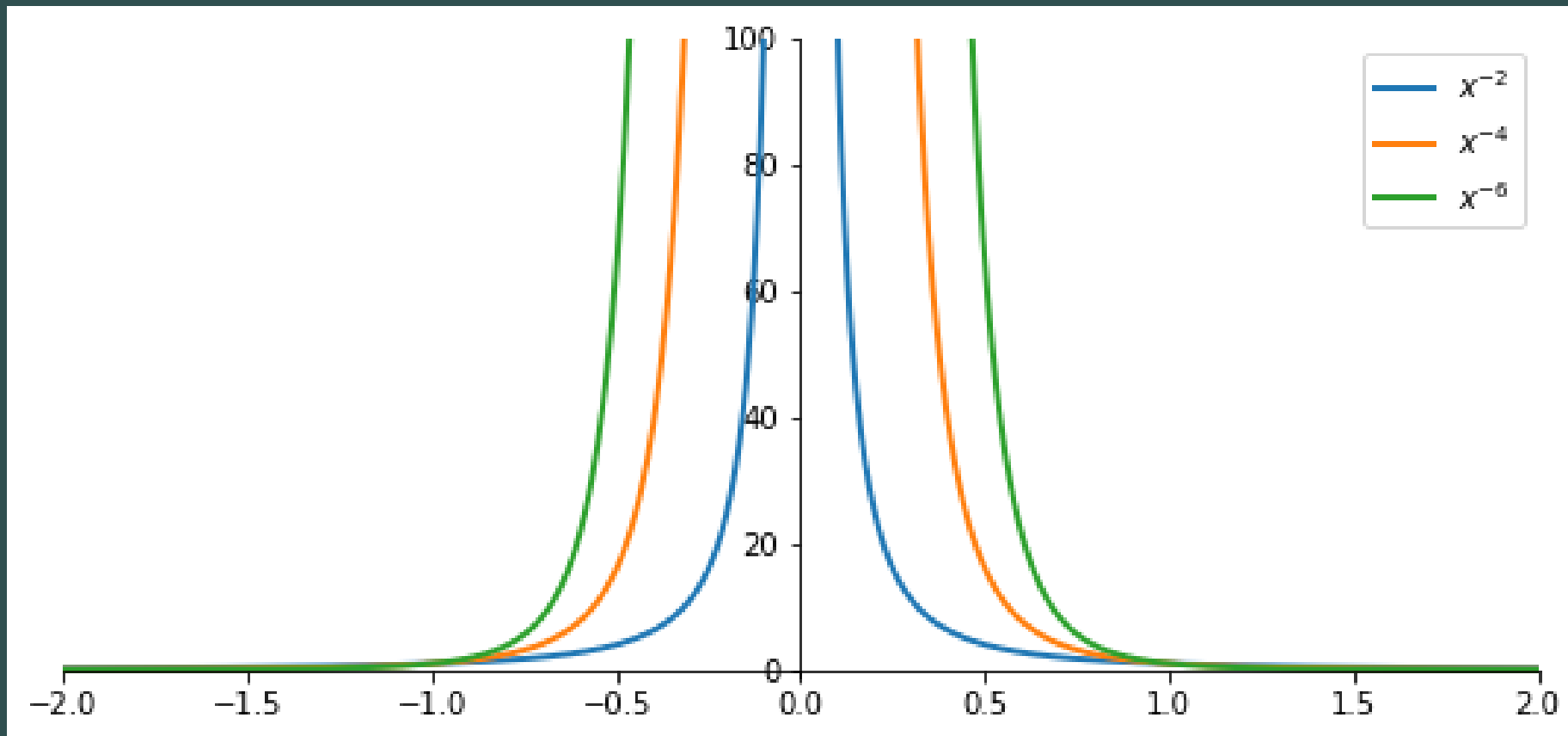
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

**Proprietà** se  $n$  è pari

- $f(x)$  è pari
- Dominio:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Codominio:  $(0, +\infty)$
- Per  $x \in (-\infty, 0)$  è strettamente crescente
- Per  $x \in (0, +\infty)$  è strettamente decrescente



# Potenza con esponente intero negativo pari

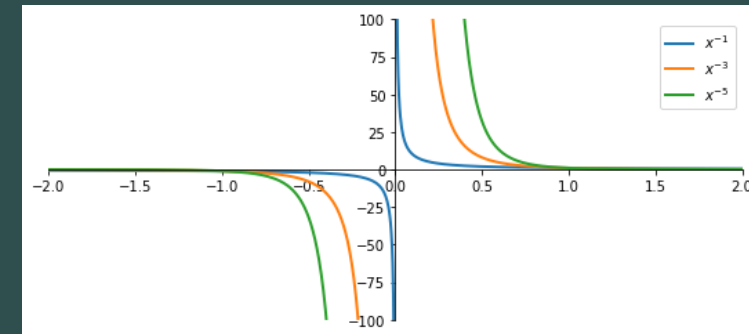


# Potenza con esponente intero negativo dispari

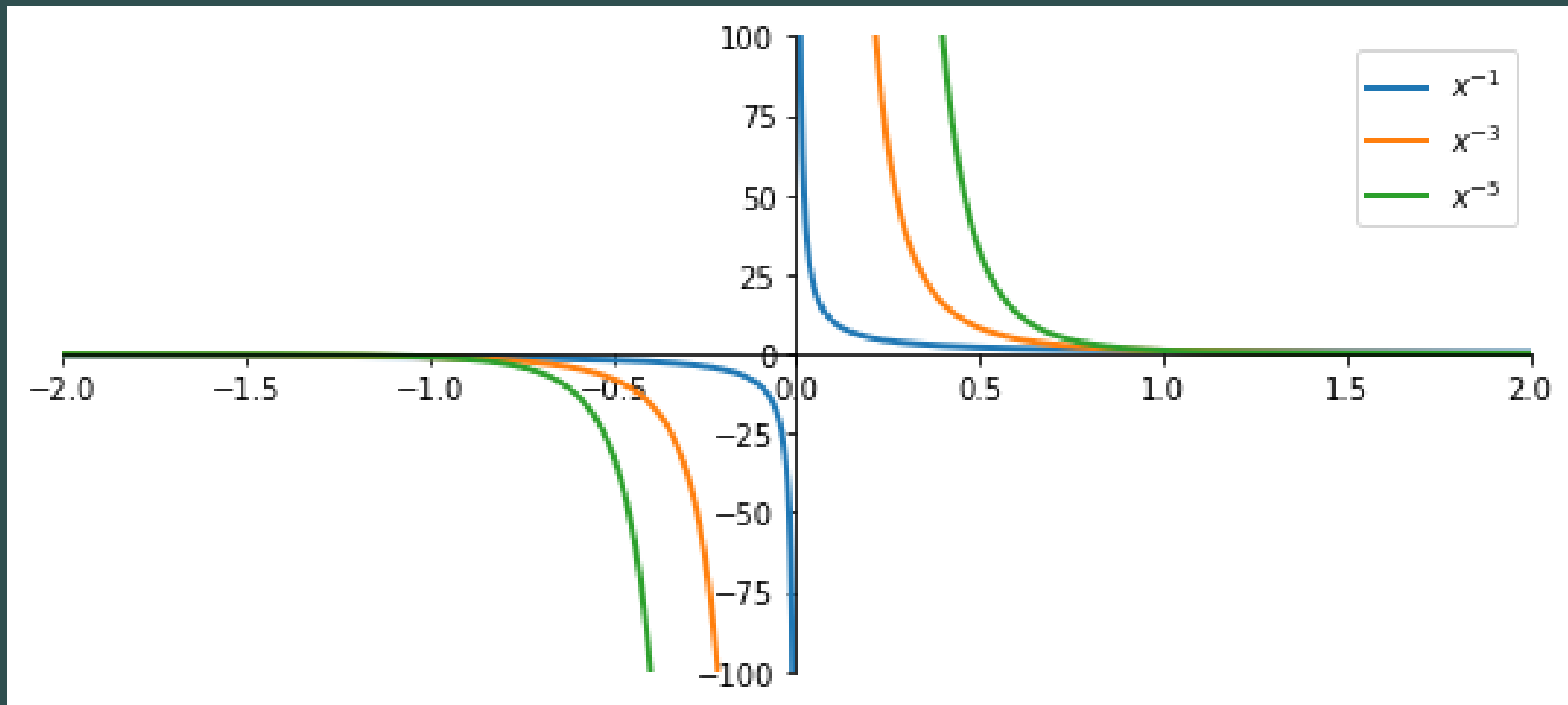
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

**Proprietà** se  $n$  è *dispari*

- $f(x)$  è dispari
- Dominio  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Codominio:  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- Per  $x \in (-\infty, 0)$  è strett. decrescente
- Per  $x \in (0, +\infty)$  è strett. decrescente



# Potenza con esponente intero negativo dispari



# Potenze con esponente razionale

Avendo definito il dominio di tutte come  $x \in [0, +\infty)$ , risulta ben definito

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

cioè

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

Altrimenti,  $x^{\frac{m}{n}}$  produrrebbe risultati diversi di  $x^{\frac{\alpha m}{\alpha n}}$  con  $\alpha \in \mathbb{N}$

Ad esempio, per  $x < 0$

- $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$  non è calcolabile (radice pari di un numero negativo)
- $x^{\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}} = x^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{x^2}$  è calcolabile

# Proprietà delle potenze

Se  $x, y > 0$  e  $p, q \in \mathbb{Q}$  allora

- $x^p > 0$
- $(xy)^p = x^p y^p$
- $x^p x^q = x^{p+q}$
- $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$
- $x^p / x^q = x^{p-q}$
- $(x^p)^q = x^{pq}$
- $(x/y)^p = x^p / y^p$

Se  $p < q$  si ha:

- se  $x > 1$  allora  $x^p < x^q$
- se  $0 < x < 1$  allora  $x^p > x^q$





FINE