Funzioni definizioni Parte III

(Pari e dispari / Periodiche / Convesse e concave)

Funzioni elementi base

Manolo Venturin

~~~ 5 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Funzione pari e funzione dispari
- Funzione periodica
- Definizione di funzione convessa

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

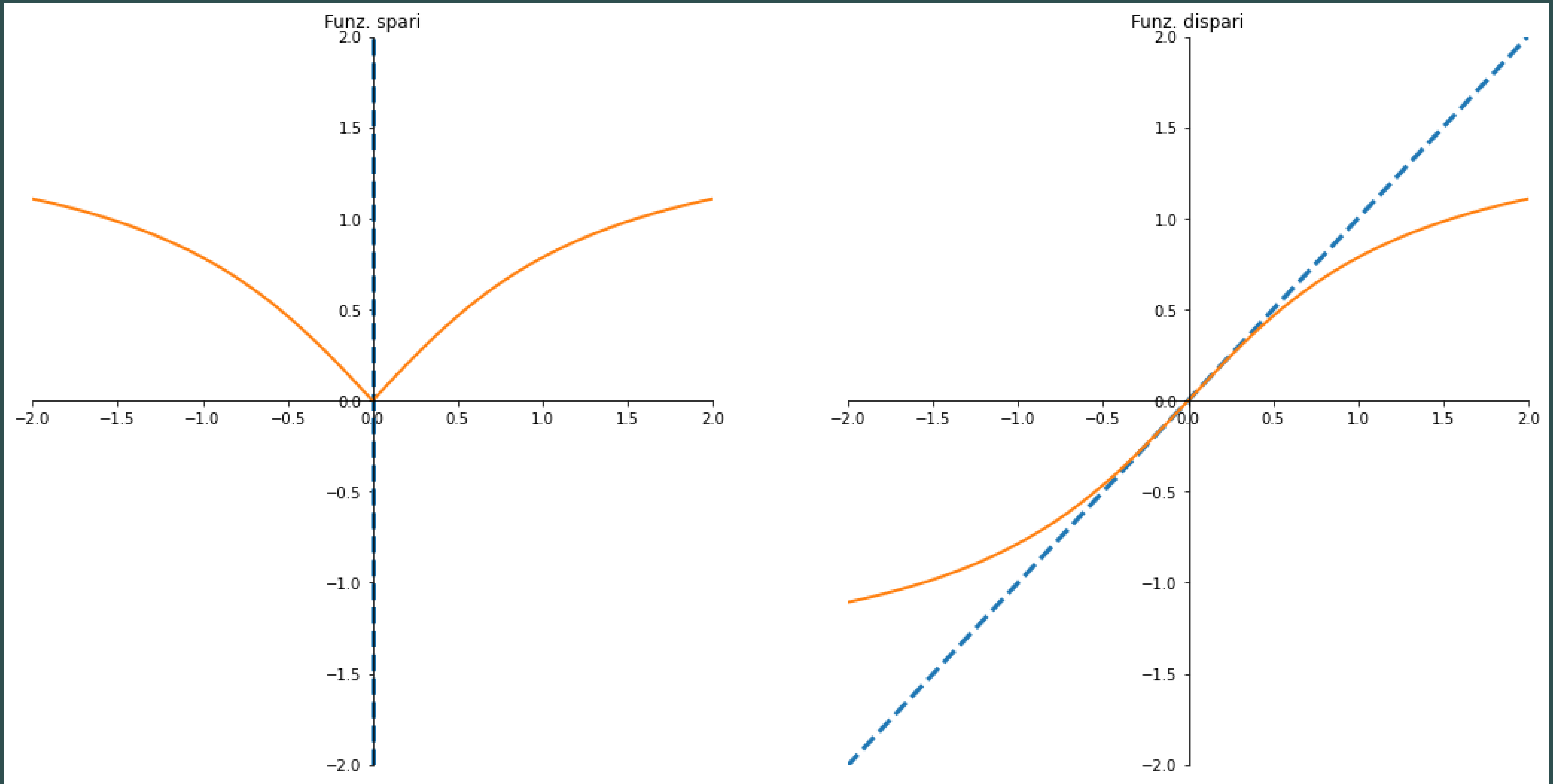
Funzione pari e dispari (definizione)

> Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, si dice che $f(x)$
>
> - è **pari** sse $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in X$
> - è **dispari** sse $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in X$

Proprietà

- Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto alla retta delle ordinate $x = 0$
- Il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine $(0, 0)$
- Se f è pari allora non può essere iniettiva
- Il dominio di una funzione pari o dispari è simmetrico rispetto allo 0

Esempio di funzione pari e dispari

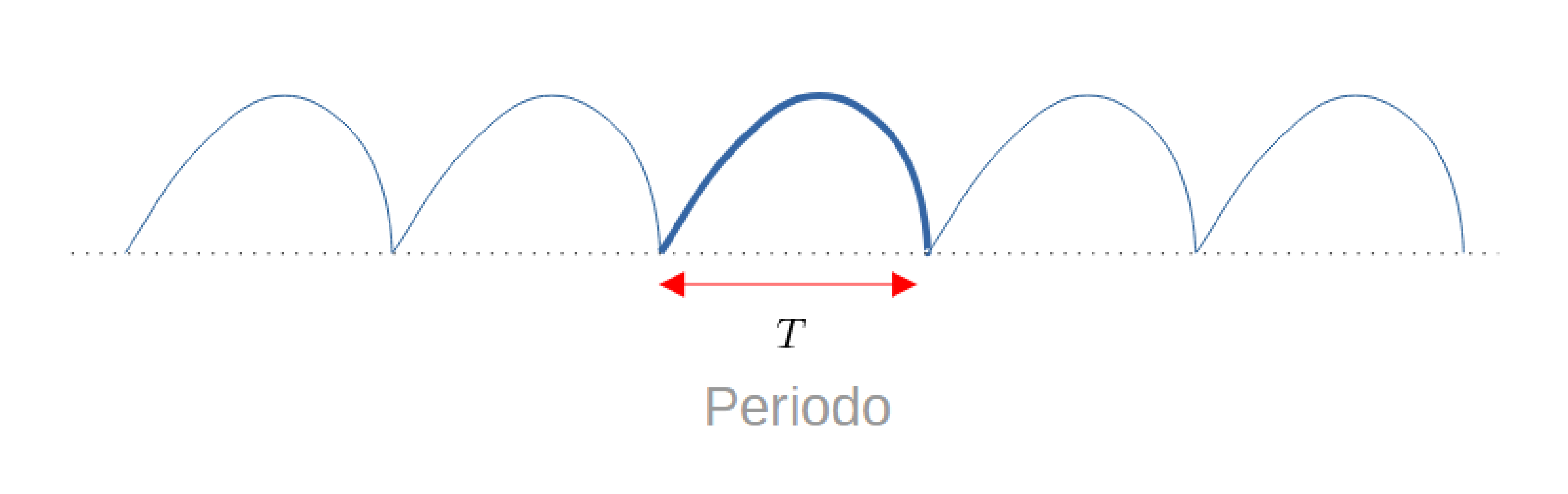


Funzioni periodiche (definizione)

Sia $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e $T > 0$, si dice che $f(x)$ è periodica sse

$f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in X$

Il più piccolo T che verifica l'uguaglianza è detto **periodo**



Proprietà

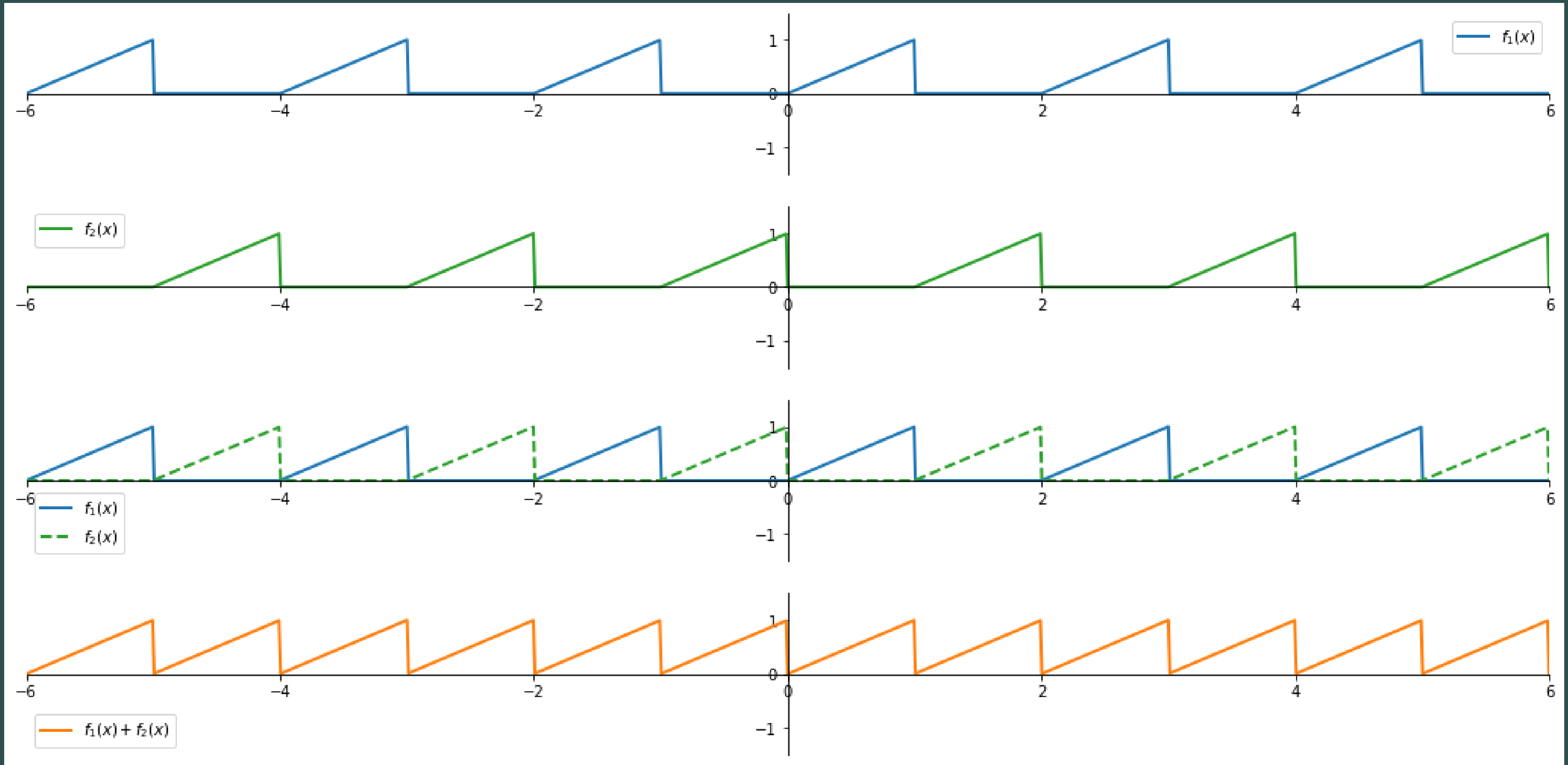
Se f, g sono funzioni periodiche di periodo T allora:

- il dominio non è limitato
- non è iniettiva
- è sufficiente studiare le proprietà in un periodo del tipo $[x_0, x_0 + T)$ e poi applicare una traslazione di quest'ultimo intervallo parallelamente all'asse x
- $f(\alpha x)$ con $\alpha \neq 0$ ha periodo $T/|\alpha|$
- $f + g$, $f \cdot g$ e f/g hanno periodo $\leqslant T$

Se g è periodica di periodo T e f qualunque allora $f(g(x))$ ha periodo $\leqslant T$

Esempi di funzioni periodiche

Esempio di somma con riduzione del periodo



Funzioni convesse (definizione)

> Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$, f si dice **convessa** sse per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$ si ha che
>
> $$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

f è concava se $-f$ è convessa

Interpretazione grafica

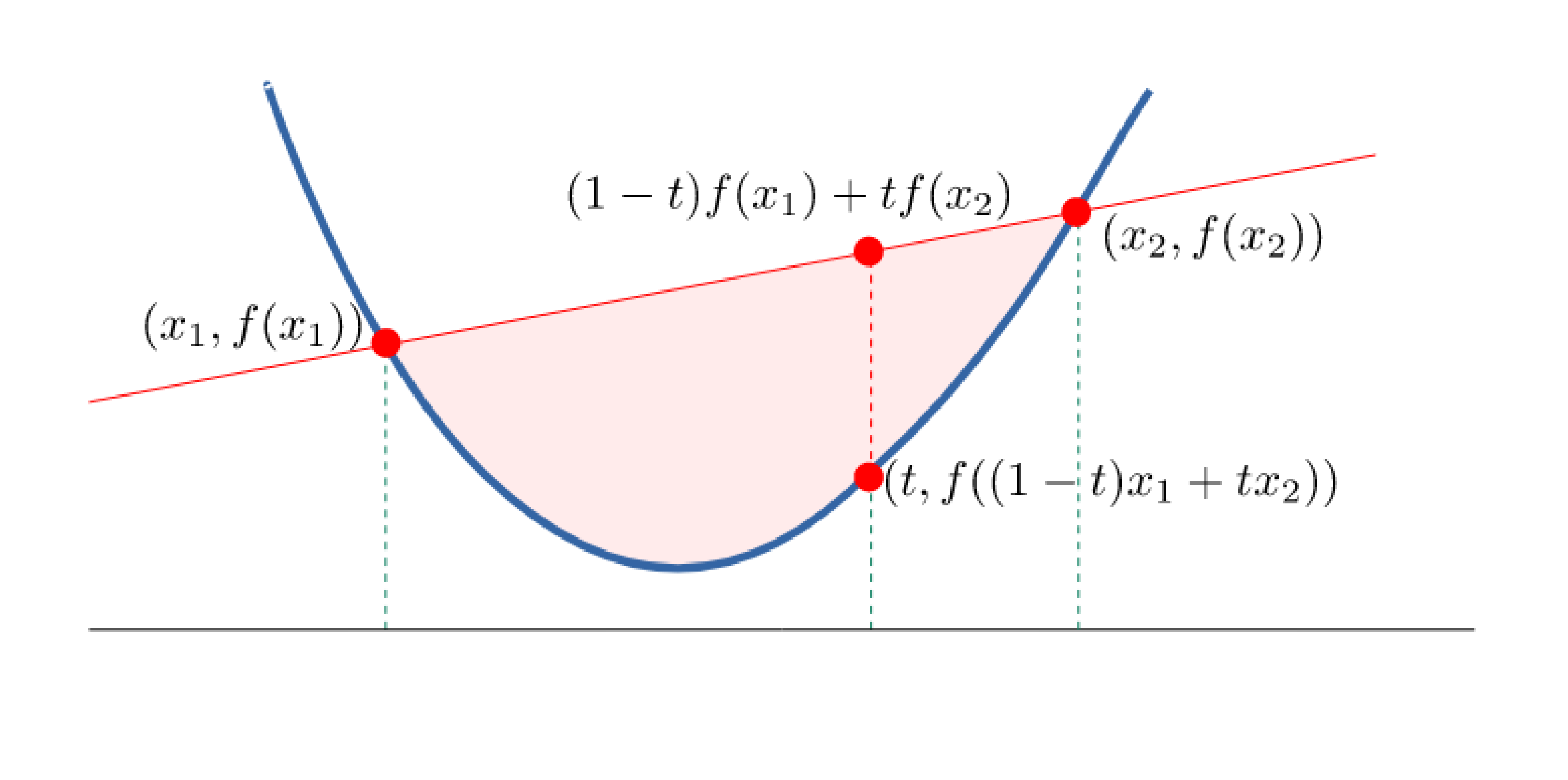
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

- Combinazione convessa: $x(t) = (1-t)x_1 + tx_2$
- Retta per i due punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$: $\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
- Valutaz. retta in $x(t)$ è:

$$\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} = \frac{(1-t)x_1 + tx_2 - x_1}{x_2 - x_1}$$
$$\implies y = t(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1)$$
$$\implies y = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

- Convessa: il grafico della funzione sta “sotto” il grafico della retta
- La retta è sia concava che convessa

Interpretazione grafica



Esempio di funzione convessa

> Mostrare che x^2 è convessa

Soluzione

Sia $x_1 < x_2$ dobbiamo dimostrare che

$$((1-t)x_1 + tx_2)^2 \leqslant (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \quad \forall t \in [0,1]$$

Esempio di funzione convessa

Sia $x_1 < x_2$ dobbiamo dimostrare che

$$((1-t)x_1 + tx_2)^2 \leqslant (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \quad \forall t \in [0,1]$$

Si ha

$$\begin{gathered}
(1-t)^2x_1^2 + t^2x_2^2 + 2t(1-t)x_1x_2 \leqslant (1-t)x_1^2 + tx_2^2 \\
(1-t)x_1^2(1-t-1) + tx_2^2(t-1) + 2t(1-t)x_1x_2 \leqslant 0 \\
-t(1-t)x_1^2 - t(1-t)x_2^2 + 2t(1-t)x_1x_2 \leqslant 0 \\
-t(1-t)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \leqslant 0 \\
-t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \leqslant 0
\end{gathered}$$

Ricordando che $t \in [0,1]$ si ha che $-t \leqslant 0, 1-t \geqslant 0$ e $(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0$ da cui la diseguaglianza


FINE
Manolo Venturin