

Funzioni definizioni

Parte II

(Funzioni monotone crescenti e decrescenti)

Funzioni elementi base

Manolo Venturin

~~~ 5 ~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione di funzione monotona
  - strettamente crescente
  - crescente
  - strettamente decrescente
  - decrescente
- Proprietà delle funzioni monotone

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Funzioni monotone (definizione)

Sia  $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $I$  un intervallo

1.  $f$  è **strettamente crescente** in  $I$  sse

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2, \text{ si ha } f(x_1) < f(x_2)$$

2.  $f$  è **crescente** in  $I$  sse

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2, \text{ si ha } f(x_1) \leq f(x_2)$$

3.  $f$  è **strettamente decrescente** in  $I$  sse

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2, \text{ si ha } f(x_1) > f(x_2)$$

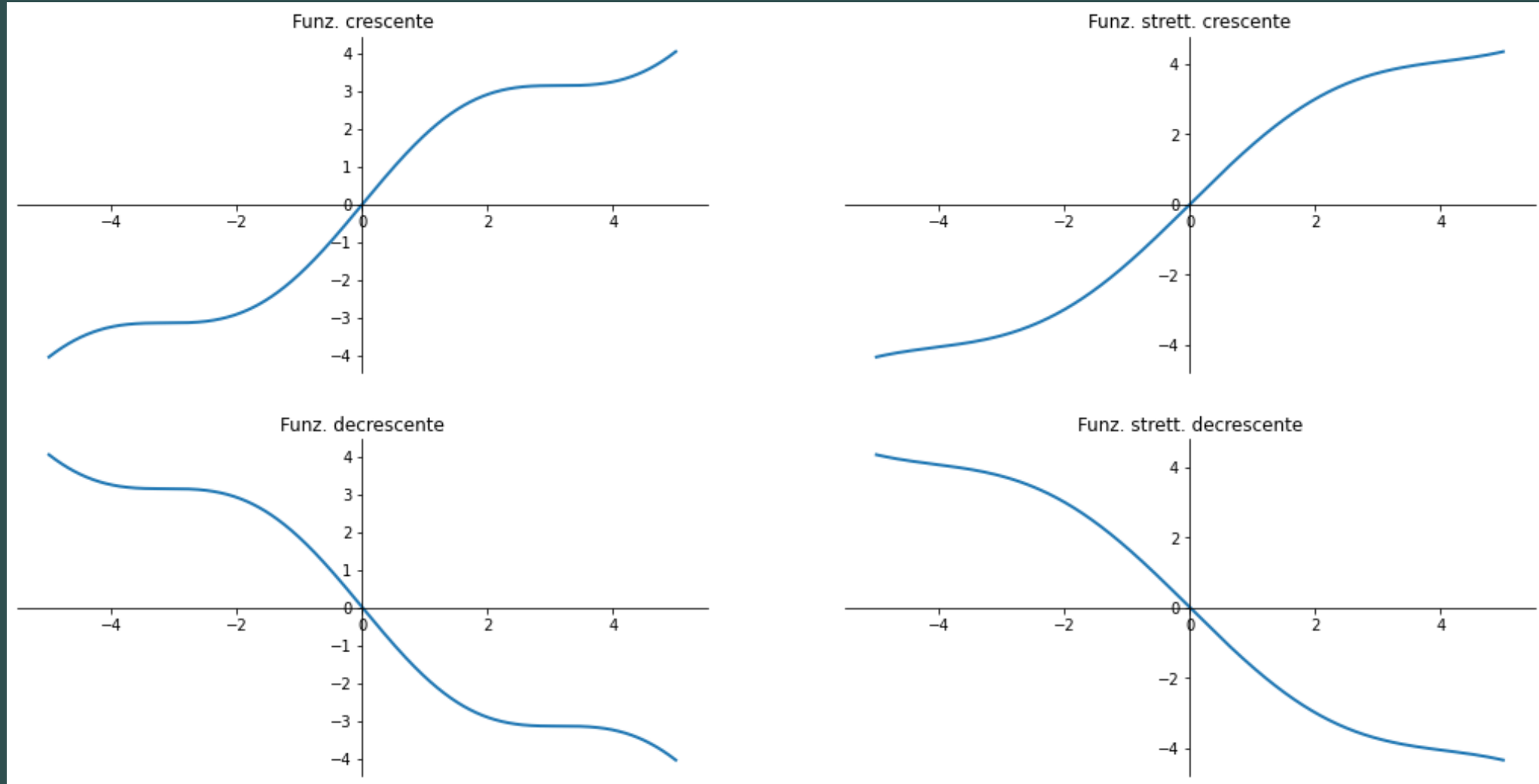
4.  $f$  è **decrescente** in  $I$  sse

$$\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2, \text{ si ha } f(x_1) \geq f(x_2)$$

5.  $f$  si dice monotona se è uno dei precedenti casi



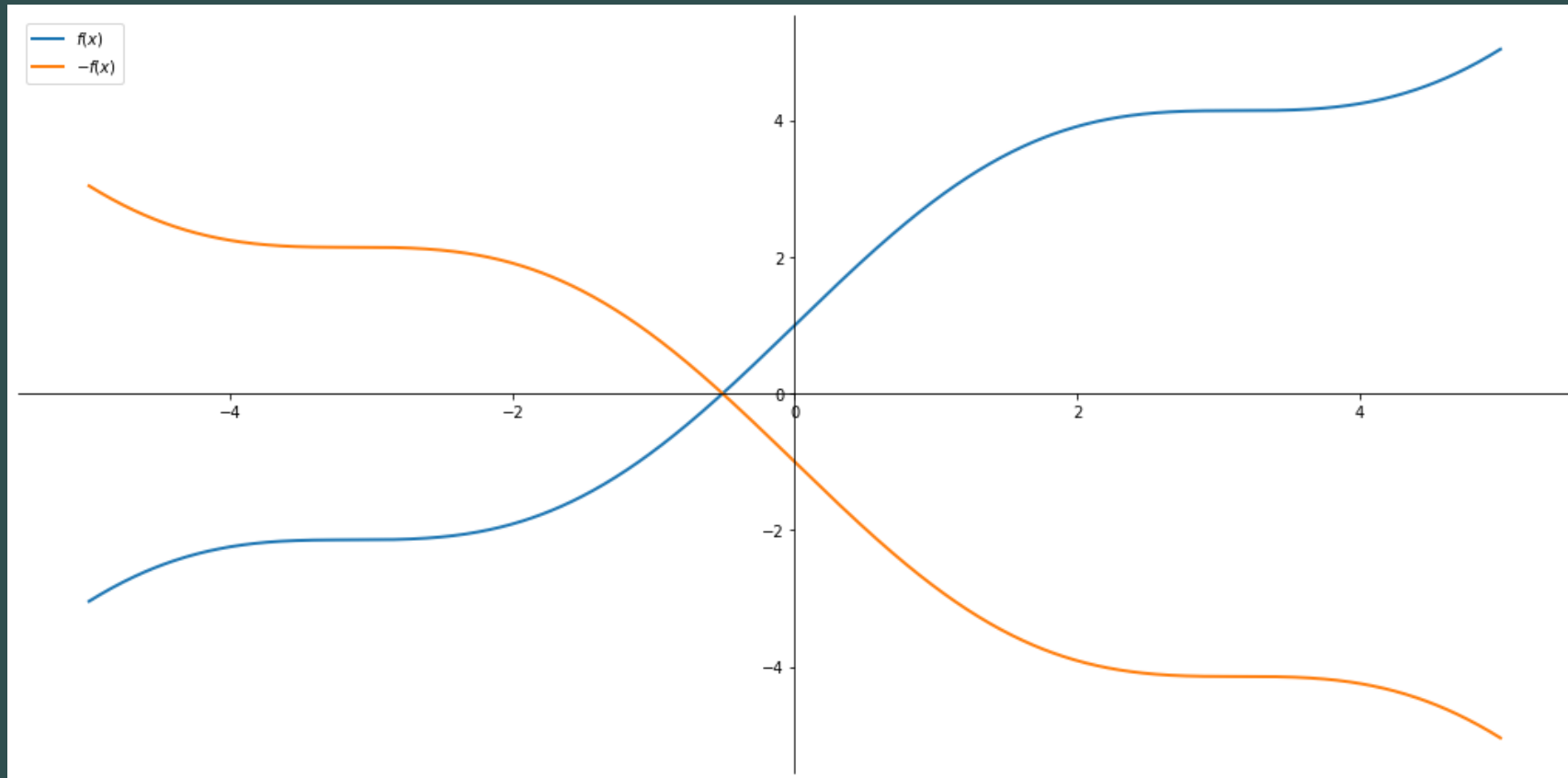
# Esempio di funzioni monotone



# Proprietà delle funzioni monotone

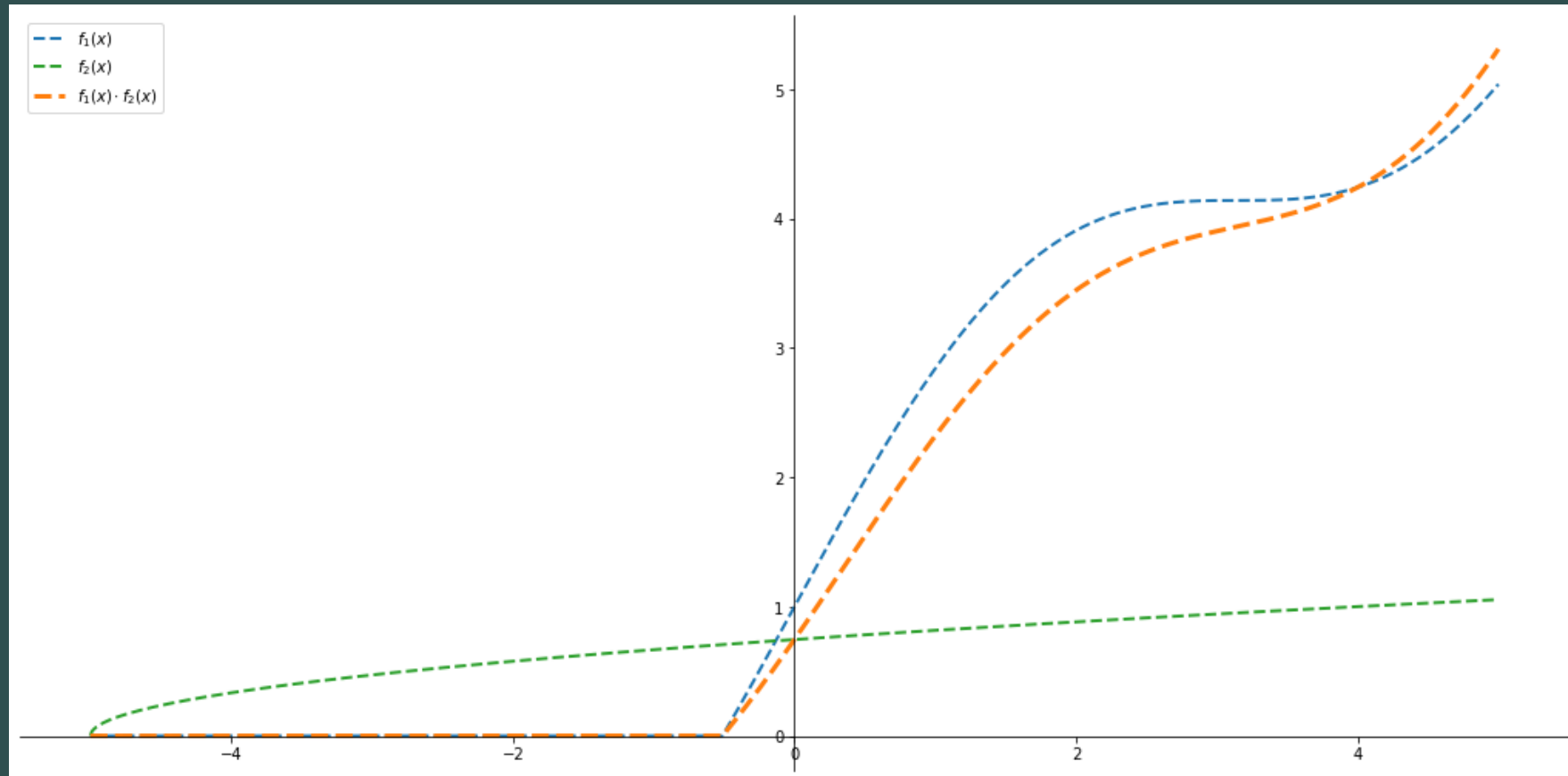
# Proprietà 1

- Se  $f$  è (strettamente) crescente allora  $-f$  è (strettamente) decrescente
  - il grafico di  $-f$  è simmetrico rispetto alla retta delle ascisse ( $y = 0$ )



# Proprietà 2

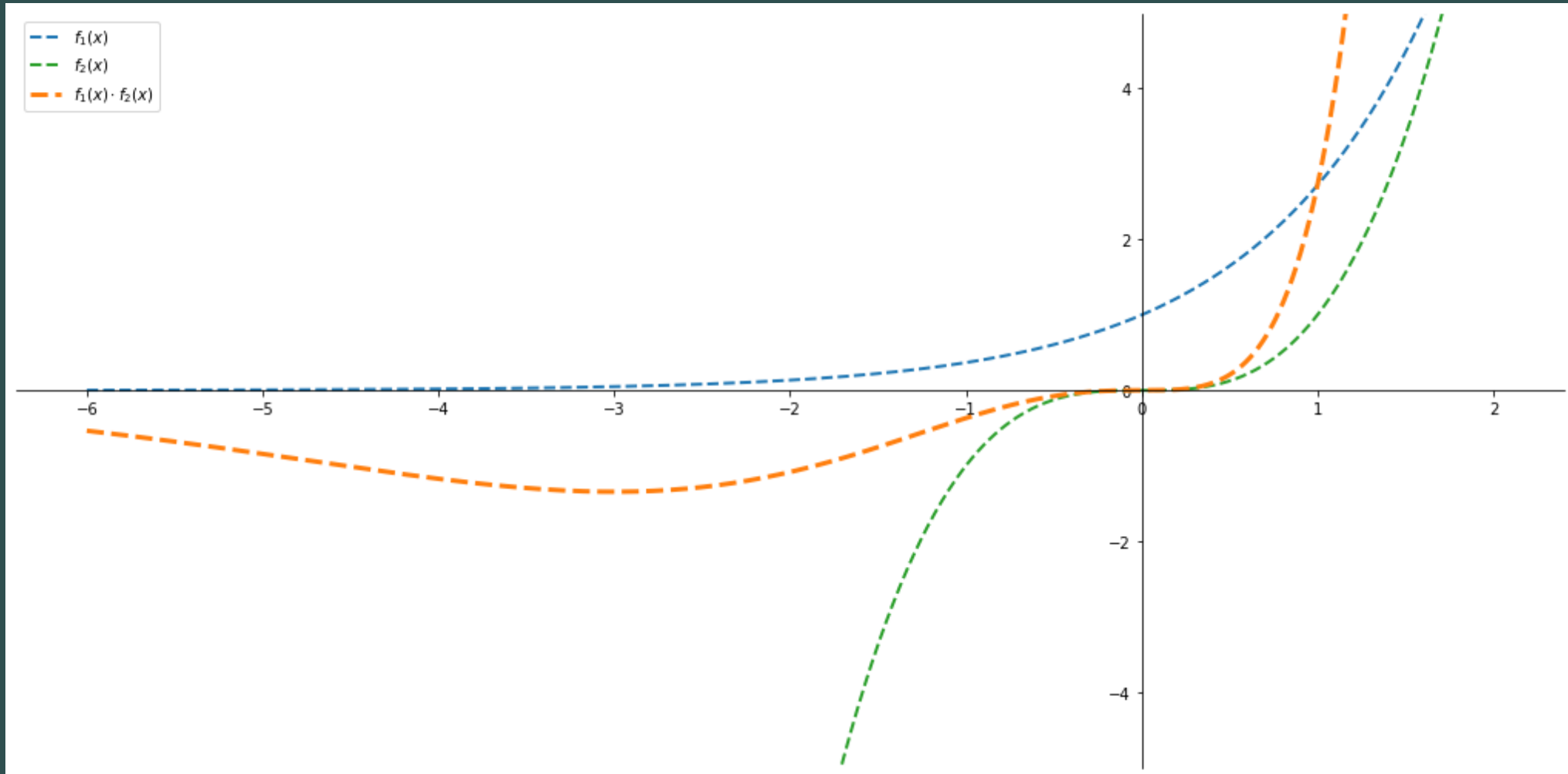
- Se  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  due funzioni crescenti (decrescenti) e positive allora il prodotto  $f \cdot g$  è crescente (decrescente) e positivo





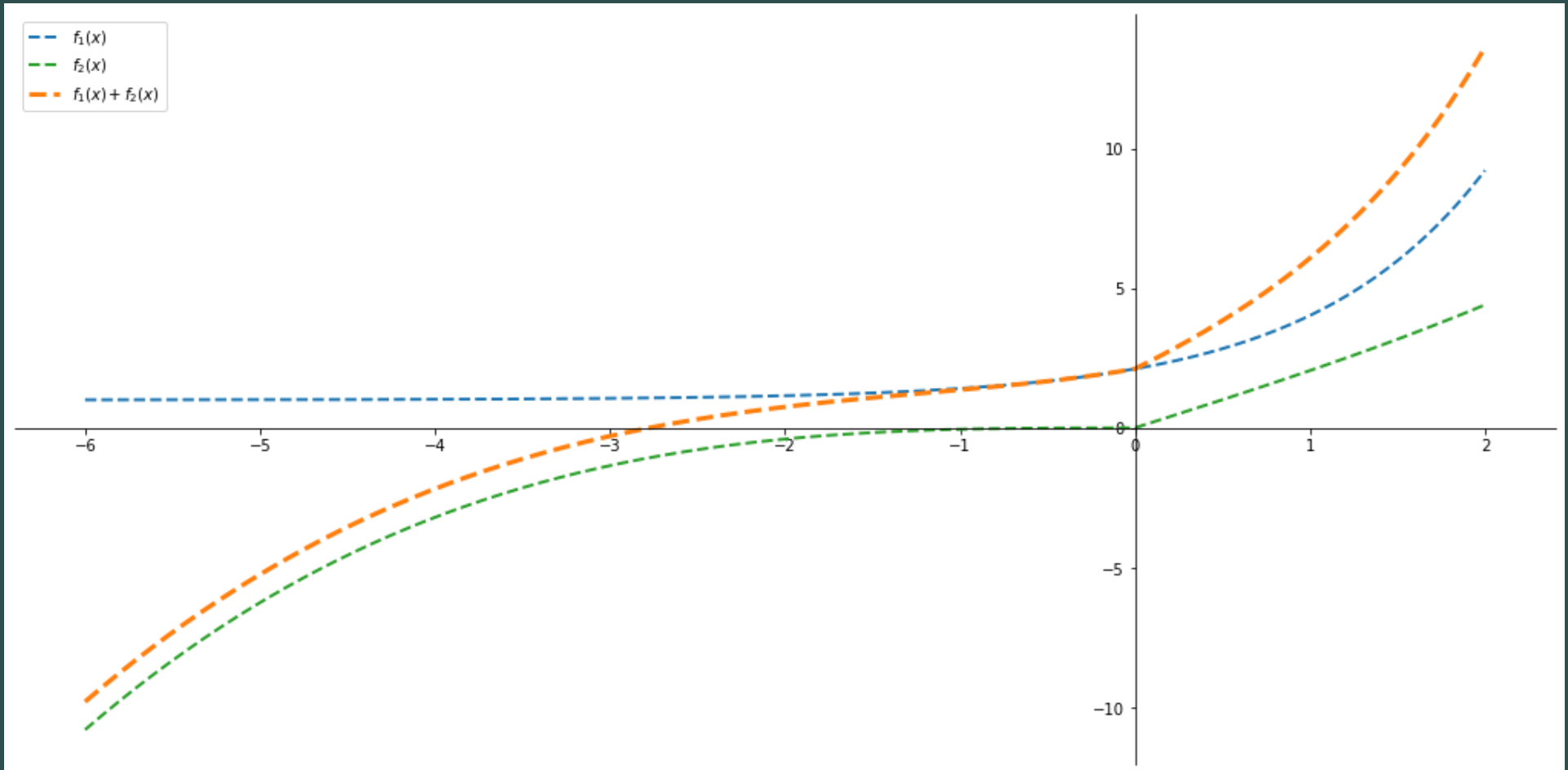
# Proprietà 2

Esempio in cui se non sono positive il risultato non vale



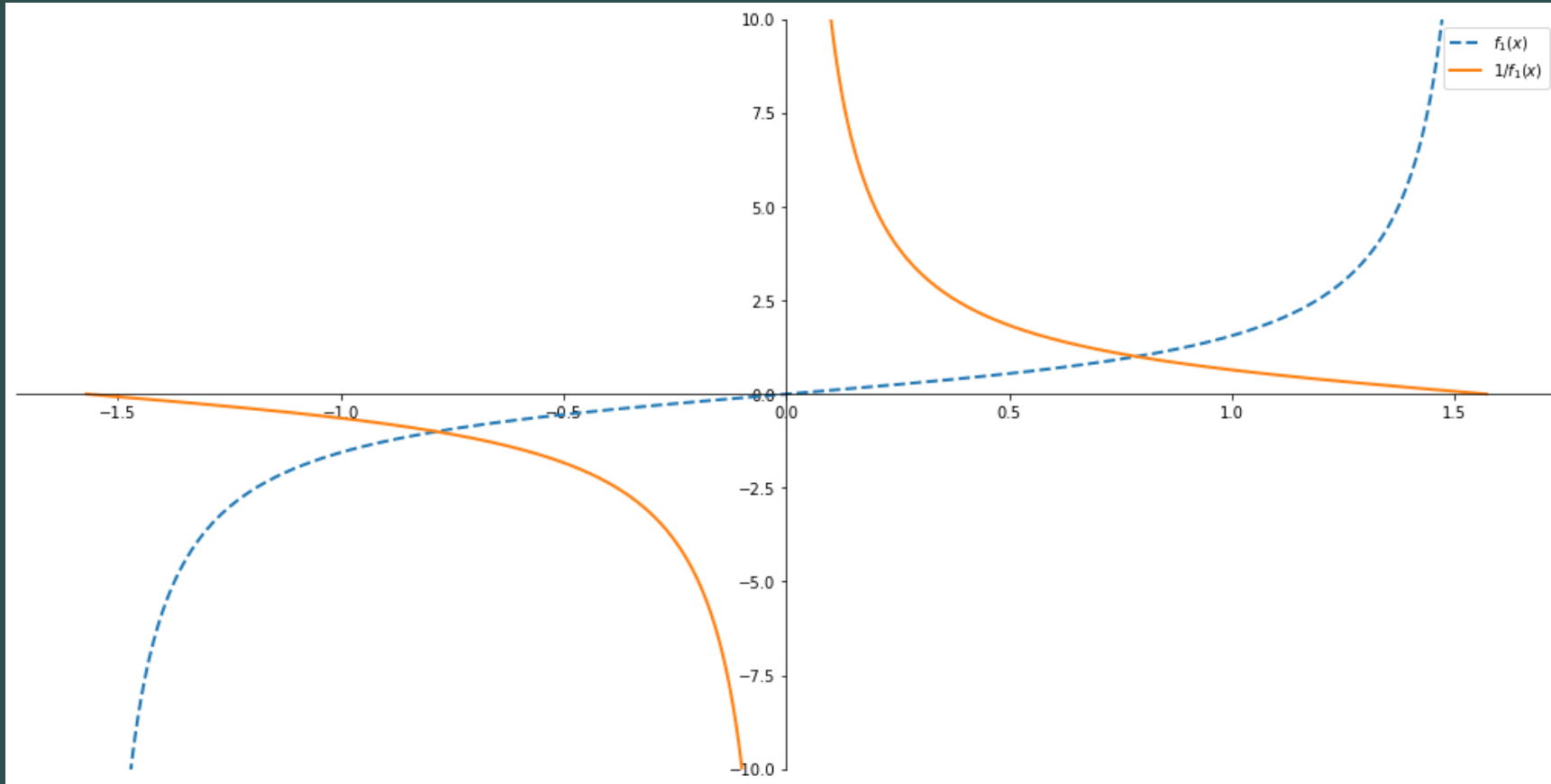
# Proprietà 3

- La somma di due funzioni crescenti (decrescanti) è crescente (decrescante)



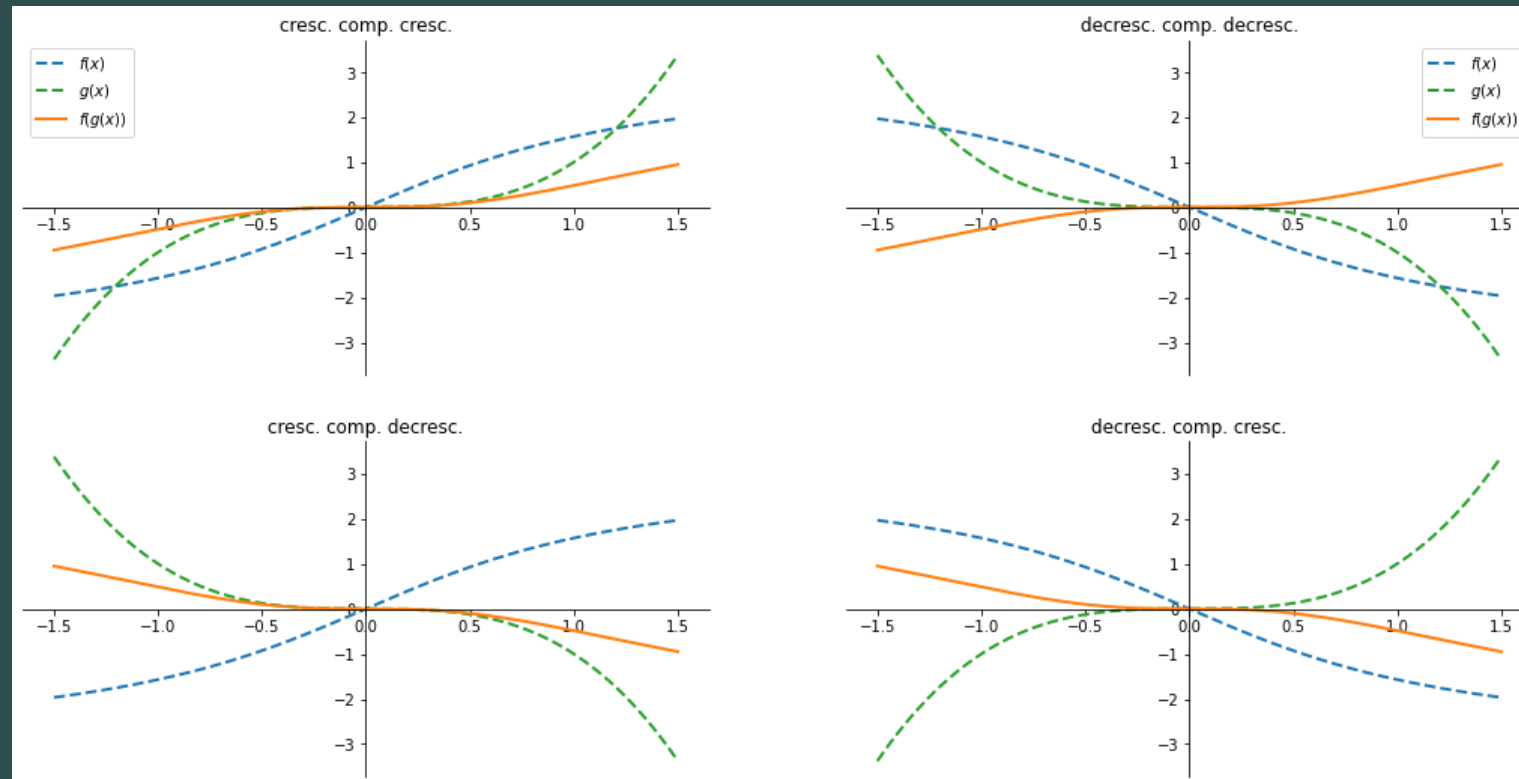
# Proprietà 4

- Il reciproco di una funzione crescente (decrecente), che non si annulla mai e di segno costante (stesso intervallo), è decrescente (crescente)



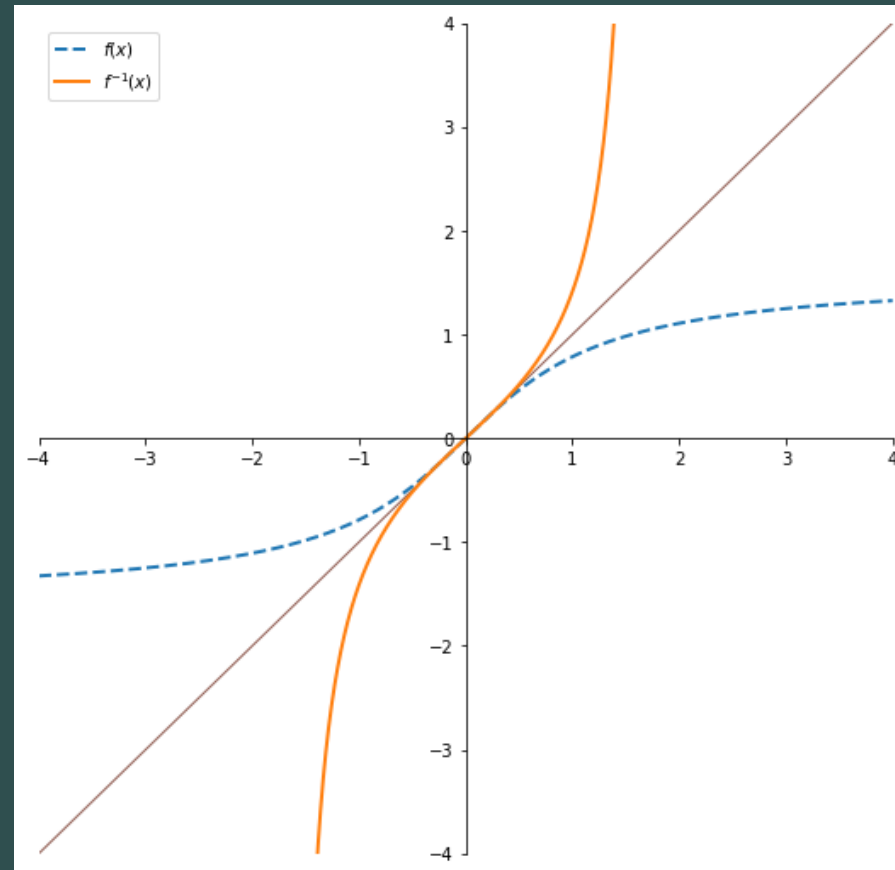
# Proprietà 5

- La composizione di due funzioni crescenti (decrescendenti) è crescente
- La composizione di una funzione crescente con una decrescente (e viceversa), è decrescente



# Proprietà 6

- Se  $f$  è strettamente crescente (decrecente) allora  $f$  è iniettiva e  $f^{-1}$  è strettamente crescente (decrecente)



# Esempi

# Esempio 1

Disegnare il grafico di  $f(x) = \frac{1}{2x}$  per  $x > 0$ .  
E' iniettiva? Se sì disegnare il grafico dell'inversa.

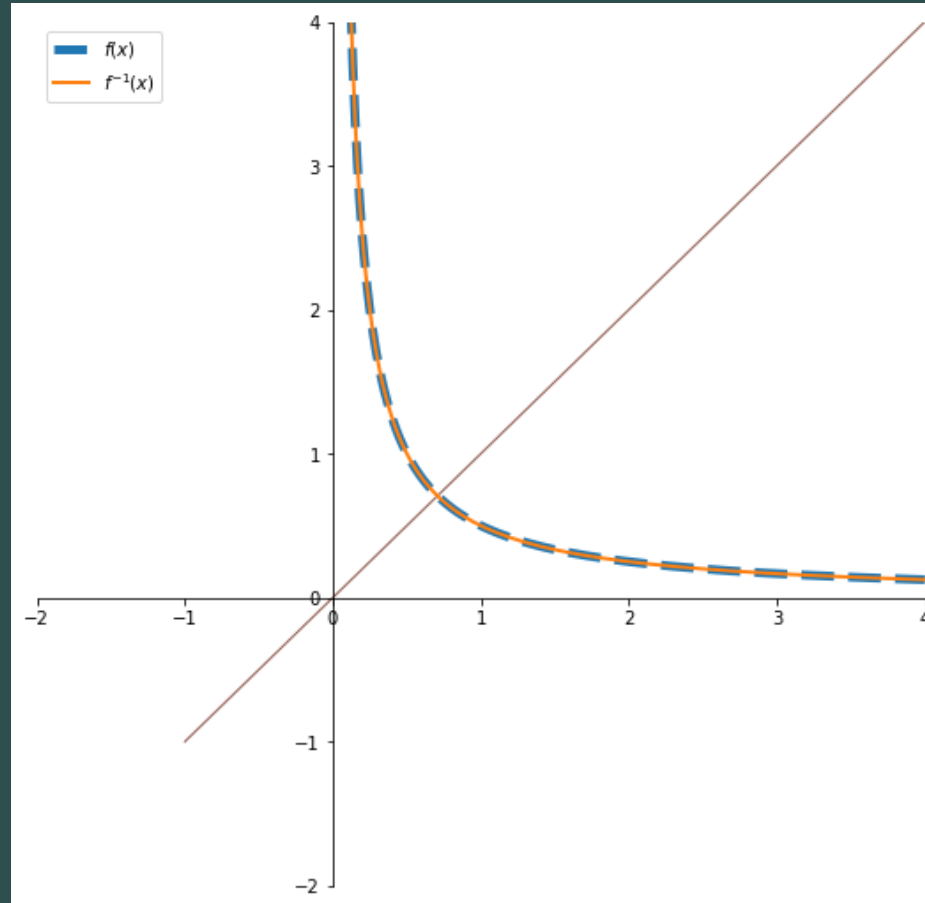
## Soluzione

$f(x)$  è una funzione strettamente decrescente per  $x > 0$ , infatti, siano  $0 < x_1 < x_2$  allora  $\frac{1}{2x_2} < \frac{1}{2x_1}$  che corrisponde a  $x_1 < x_2$  (come da ipotesi)

Essendo strettamente decrescente è anche iniettiva, e quindi esiste l'inversa (strettamente decrescente)

# Esempio 1

Risolvendo l'equazione  $y = \frac{1}{2x}$  si ottiene  $x = \frac{1}{2y}$  e quindi la funzione inversa è  
 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2x}$





# Esempio 2

Disegnare il grafico di  $f(x) = -x^2$  per  $x \leq 0$ .  
E' iniettiva? Se sì disegnare il grafico dell'inversa.

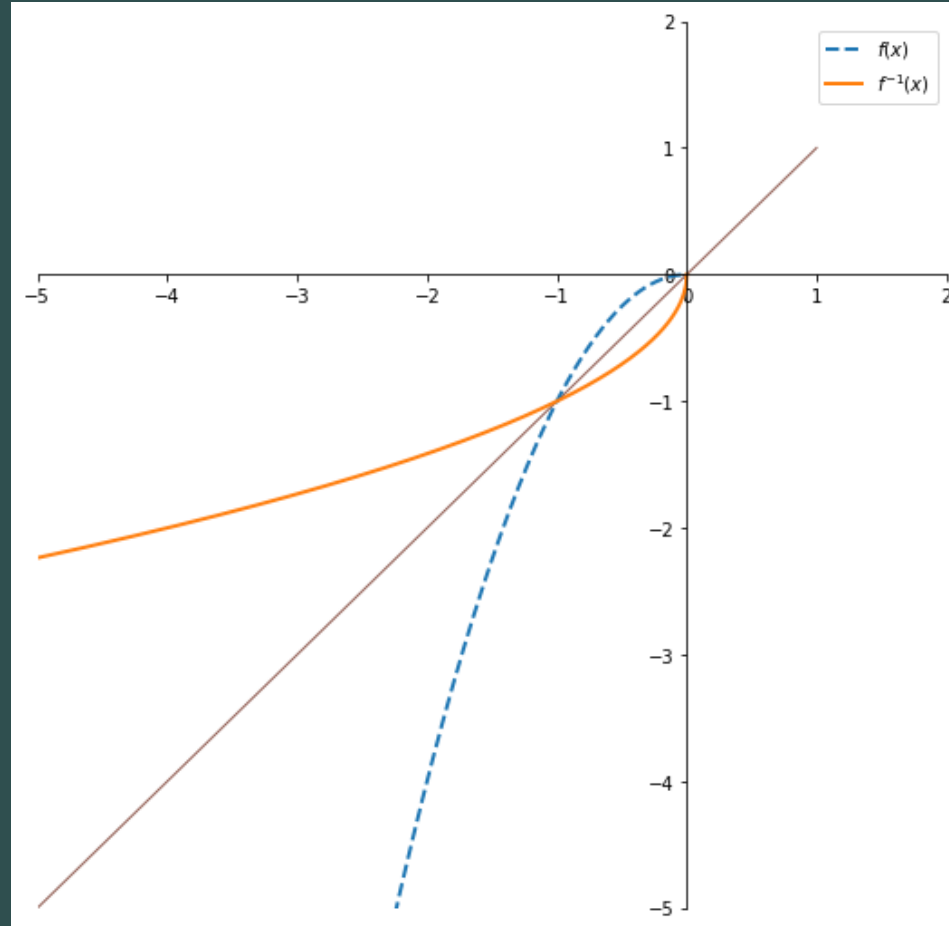
## Soluzione

$f(x)$  è una funzione strettamente crescente per  $x \leq 0$ , infatti, siano  $x_1 < x_2 \leq 0$  allora  $-x_1^2 < -x_2^2 \implies x_1^2 > x_2^2$  che risulta vera per  $x_1 < x_2 \leq 0$ . Infatti, da  $x_1 = -|x_1|$  e  $x_2 = -|x_2|$  segue che  $|x_1| > |x_2|$  e quindi  $x_1^2 > x_2^2$

Essendo strettamente crescente è anche iniettiva, e quindi esiste l'inversa (strettamente crescente)

# Esempio 2

Risolvendo l'equazione  $y = -x^2$  si ottiene  $x = \pm\sqrt{-y}$ , va scelto il segno  $-$  perché le  $x$  sono negative e quindi la funzione inversa è  $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$



# Esempio 3

Dimostrare che se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente crescente allora  $f$  è iniettiva e  $f^{-1}$  è strettamente crescente

**Passo 1:** Dim. che se  $f$  strettamente crescente allora  $f$  è iniettiva

Sia  $f$  è strettamente crescente e  $x_1, x_2 \in I$  tali che  $x_1 \neq x_2$  con  $x_1 < x_2$  (senza perdita di generalità)

Se  $x_1 < x_2$  allora  $f(x_1) < f(x_2)$  e quindi  $f(x_1) \neq f(x_2)$

Questo prova che  $f$  è iniettiva

# Esempio 3

se  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente crescente allora  $f$  è iniettiva e  $f^{-1}$  è strettamente crescente

## Passo 2

Dalla definizione di inversa abbiamo che  $f^{-1}: \mathcal{I}(f) \rightarrow I$ .

Dal momento che  $x_1, x_2 \in I$  e  $f$  è strettamente crescente i.e.  $f(x_1) < f(x_2)$  i.e

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

e applicando  $f$  abbaiamo

$$f(f^{-1}(y_1)) = y_1 = f(x_1) < f(x_2) = y_2 = f(f^{-1}(y_2))$$

da cui

$$y_1 < y_2$$

 che dimostra che la funzione inversa è strettamente crescente



FINE