

Funzioni definizioni

Parte I

(Definizione / Suriettiva, iniettiva e biiettiva / Inversa)

Funzioni elementi base

Manolo Venturin

~~~ 5 ~~~

# Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione di funzione
- Immagine / Contro-immagine / Dominio / Grafico
- Funzione suriettiva
- Funzione iniettiva
- Funzione biiettiva
- Funzione inversa
- Inversa per via grafica

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Definizione di funzione

## Definizione

Dati due insiemi  $X, Y \neq \emptyset$ , si dice **funzione** da  $X$  in  $Y$  una relazione  $f$  tale che

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y \text{ tale che } y = f(x)$$

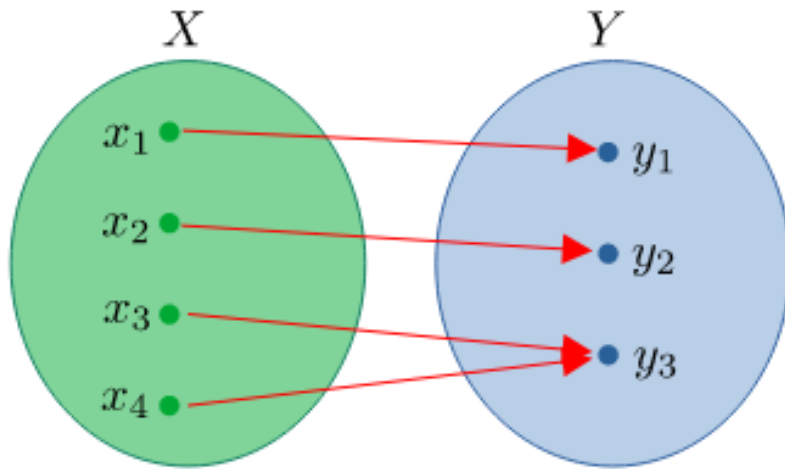
## Nota:

- Per relazione si intende un qualsiasi sottoinsieme del prodotto cartesiano  $A \times B$
- Quindi la funzione è un particolare sottoinsieme del prodotto cartesiano

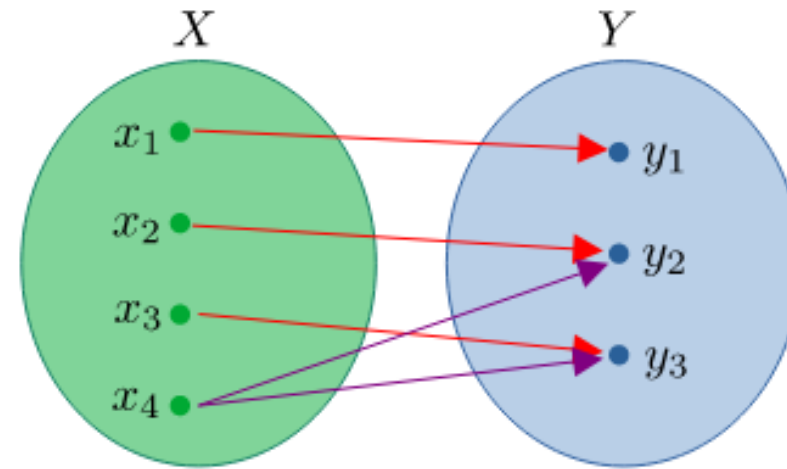
## Scritture alternative

$$\begin{array}{ccc} f : & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

# Esempio di funzione e di non funzione



Funzione



Non funzione

# Altre definizioni inerenti le funzioni

Sia  $f: X \rightarrow Y$ , allora

- $X$  **dominio** indicato con  $\mathcal{D}(f)$
- $Y$  **codominio**: indicato con  $\mathcal{C}(f)$
- **Immagine** di  $f$ :

$$\mathcal{I}(f) = \{f(x): x \in X\} \subseteq Y$$

- se  $C$  è un insieme  $f(C) = \{f(c): c \in C\} \subseteq Y$

- **Contro-immagine** di  $S$  secondo  $f$ :

$$f^{-1}(S) = \{x \in X: f(x) \in S\}$$

- **Grafico** di  $f$ :

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, f(x)): x \in X\} \subseteq (X \times Y)$$

# Esempio

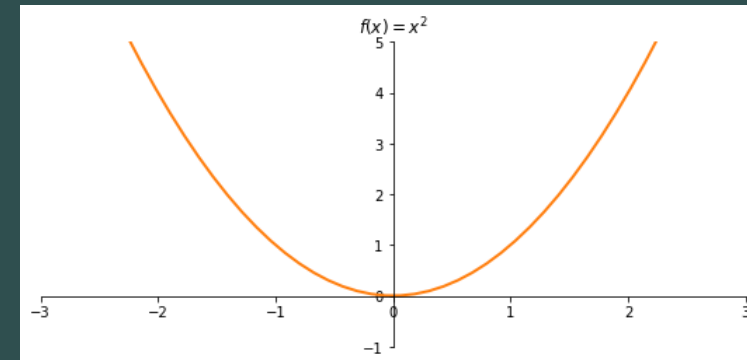
Studiale le proprietà di  $f(x) = x^2$

## Soluzione

- Dominio  $\mathbb{R}$
- Codominio  $\mathbb{R}^+$  (numeri maggiori o uguali a zero)
- Esempio di valutazione:  $f(\pm 1) = 1$ ,  $f(\pm 2) = 4$
- Contro-immagine di  $\{-1\}$  è  $f^{-1}(\{-1\}) = \emptyset$
- Contro-immagine di  $\{1\}$  è

$$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$$

- Grafico di  $f$



# Funzione suriettiva

## Definizione

Una funzione  $f$  si dice **suriettiva** se ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio

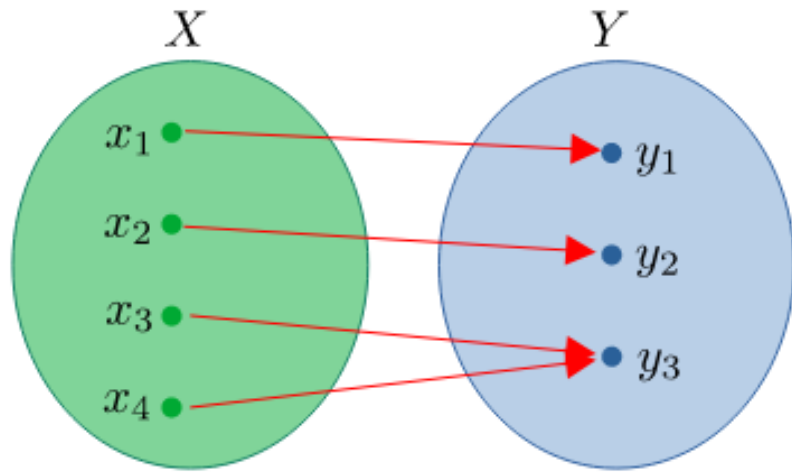
$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ tale che } f(x) = y$$

E' equivalente a  $\mathcal{I}(f) = Y$

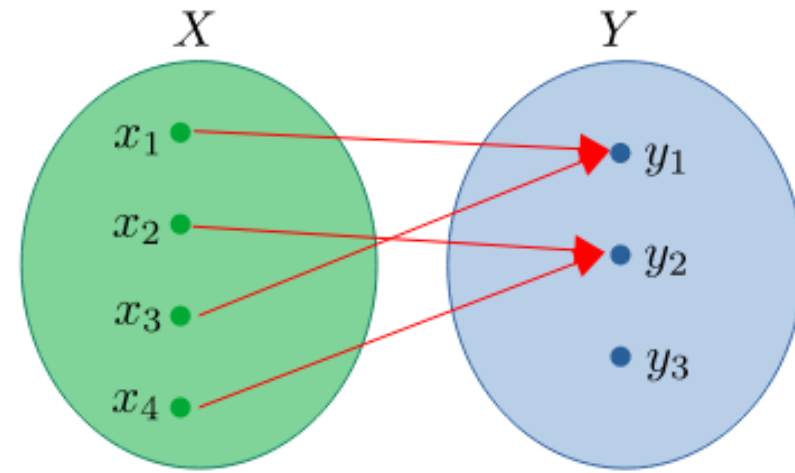
## Restrizione del codominio

E' sempre possibile restringere il codominio affinché  $f$  sia suriettiva

# Esempio



Funzione suriettiva

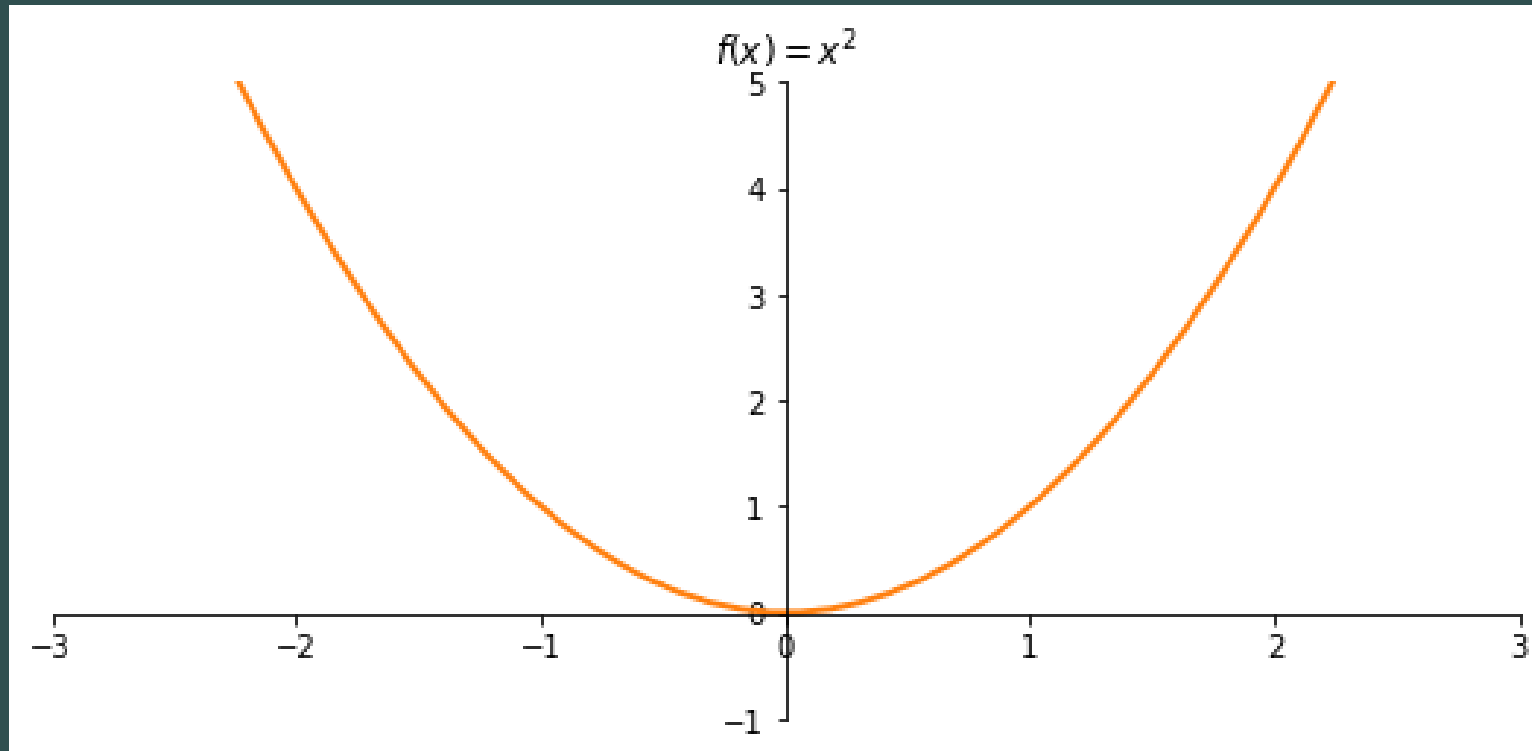


Funzione non suriettiva

# Esempio

Sia  $f(x) = x^2$ , allora

- $f$  non è suriettiva in  $\mathbb{R}$ , infatti  $-1$  non è mappato
- $f$  è suriettiva in  $\mathbb{R}^+$



# Funzione iniettiva

## Definizione

Una funzione  $f$  si dice **iniettiva** se associa, a elementi distinti del dominio, elementi distinti del codominio i.e.

$$\forall x, y \in X, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Sono equivalenti:

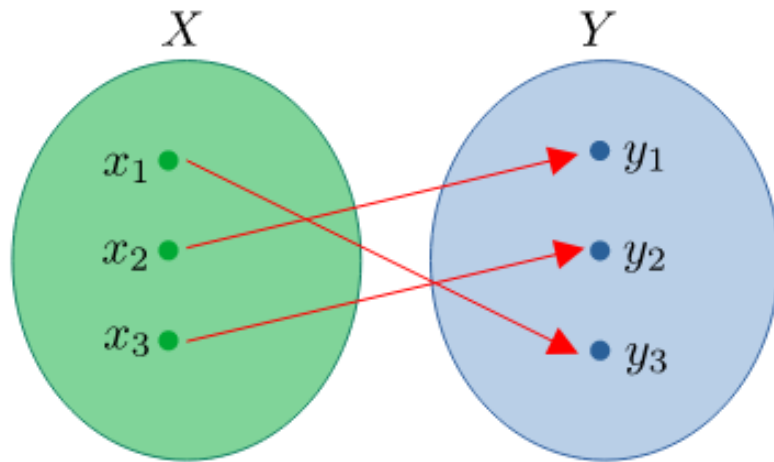
1.  $\forall x, y \in X, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$
2.  $\forall x, y \in X, \quad f(x) = f(y) \implies x = y$
3.  $\forall y \in \mathcal{I}(f), \exists! x \in X$  tale che  $y = f(x)$

## Restrizione del dominio

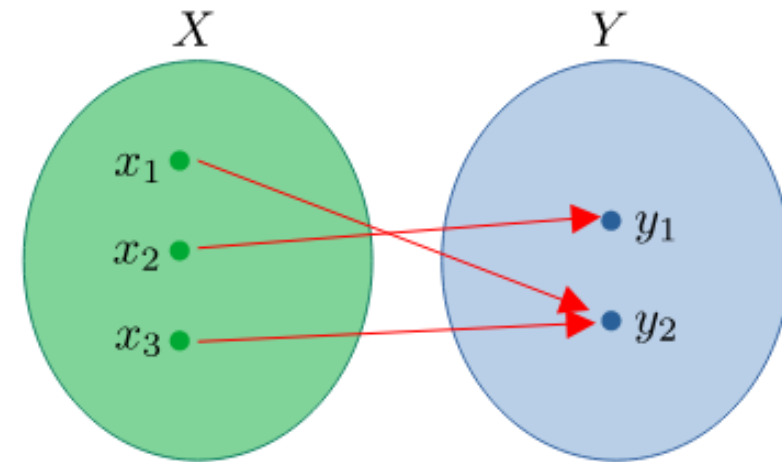
E' sempre possibile restringere il dominio affinché  $f$  sia iniettiva (in questo caso si cerca il dominio più grande possibile)



# Esempio



Funzione iniettiva



Funzione non iniettiva

# Funzione biiettiva

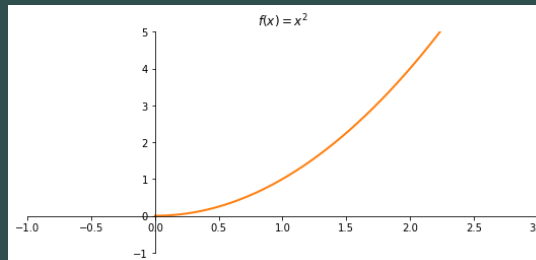
## Definizione

Una funzione si dice **biiettiva** se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva, i.e.

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ tale che } y = f(x)$$

## Esempio

La funzione  $f: [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty]$  definita come  $f(x) = x^2$  è iniettiva e suriettiva e quindi biiettiva



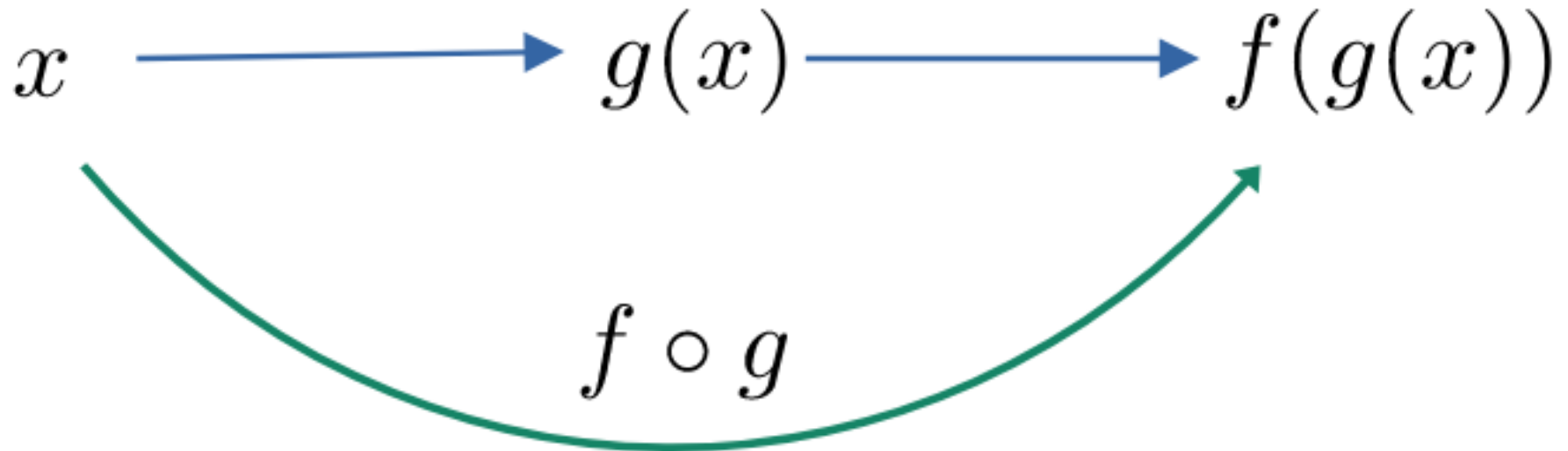
# Funzioni somma, prodotto e rapporto

Siano  $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  allora

- somma:  $(f_1 + f_2): (X_1 \cap X_2) \rightarrow \mathbb{R}$  come  $f_1(x) + f_1(x)$ 
  - dominio  $\mathcal{D}(f_1 + f_2) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$
- prodotto:  $(f_1 \cdot f_2): (X_1 \cap X_2) \rightarrow \mathbb{R}$  come  $f_1(x) \cdot f_1(x)$ 
  - dominio  $\mathcal{D}(f_1 \cdot f_2) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2)$
- rapporto:  $(f_1 / f_2): (X_1 \cap \{x \in X_2: f_2(x) \neq 0\}) \rightarrow \mathbb{R}$  come  $f_1(x) \cdot f_1(x)$ 
  - dominio  $\mathcal{D}(f_1 / f_2) = \mathcal{D}(f_1) \cap \mathcal{D}(f_2) \cap \{x \in \mathcal{D}(f_2): f_2(x) \neq 0\}$

# Funzione composta

Siano  $g: X \rightarrow Y$  e  $f: Y \rightarrow Z$  allora la funzione composta è definita come  $f \circ g = f(g(x))$



# Esempio

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$x \mapsto x + 1$$

e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$x \mapsto x^2$$

allora

- $f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$
- $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$

# Proprietà

- $f \circ g \neq g \circ f$
- La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva
- La composizione di due funzioni biiettive è biiettiva

# Esercizio

Dimostrare che se  $f$  è iniettiva e  $g$  è iniettiva, allora  $f \circ g$  è iniettiva

## Dimostrazione

Dati due numeri  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(g)$  tali che  $x_1 \neq x_2$  si ha

$$y_1 = g(x_1) \neq g(x_2) = y_2$$

in quanto  $g$  è iniettiva.

Ora, dal momento che  $y_1 \neq y_2$  e  $f$  è iniettiva segue che

$$f(y_1) \neq f(y_2) \iff f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$$

dimostrando che la composizione  $f \circ g$  è iniettiva.

# Funzione inversa

Una funzione  $f: X \rightarrow Y$  si dice invertibile se esiste una funzione  $g: Y \rightarrow X$  tale che

$g(f(x)) = x$  per ogni  $x \in X$ , e

$f(g(y)) = y$  per ogni  $y \in Y$

L'**inversa** di una funzione  $f$  viene indicata con  $f^{-1}$

## Nota

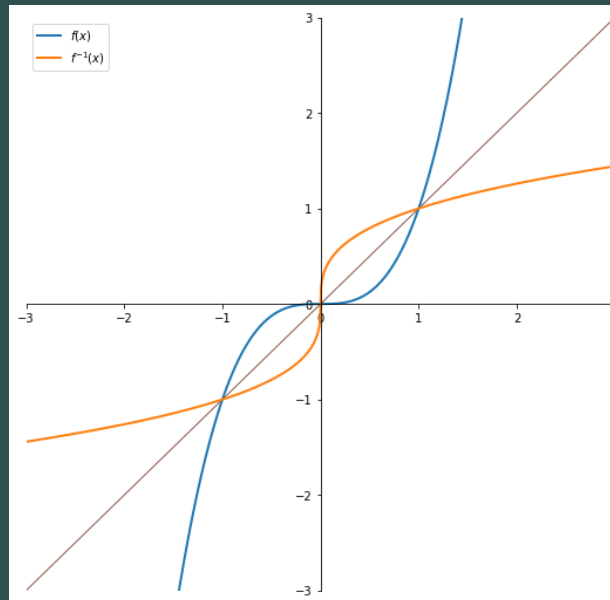
- Una funzione suriettiva garantisce che tutti i punti del codominio siano raggiungibili
- Una funzione iniettiva garantisce la corrispondenza uno a uno tra dominio e codominio
- E' sempre possibile restringere il dominio e il codominio di una funzione in modo tale da renderla iniettiva e suriettiva (in questo caso si cerca il dominio più grande possibile)

# Grafico dell'inversa

Sia  $f$  una funzione biettiva e  $f^{-1}$  la sua inversa, allora il grafico di  $f$  è legato al grafico di  $f^{-1}$  dalla relazione

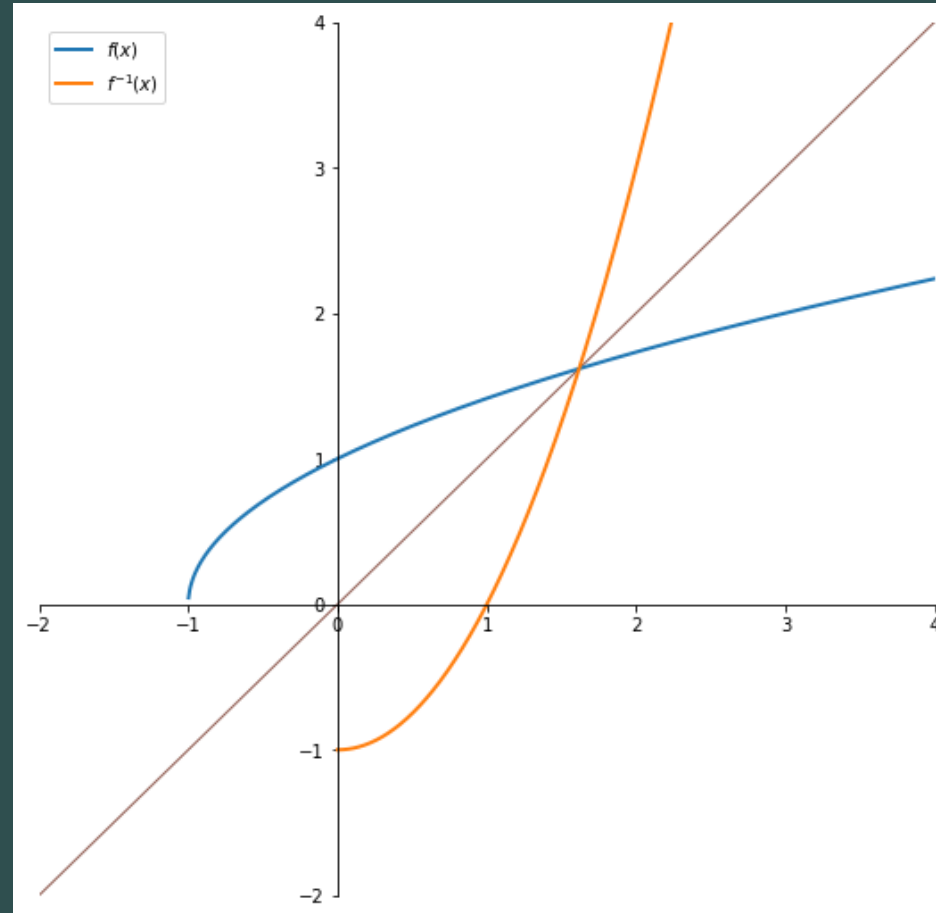
$$\mathcal{G}(f^{-1}) = \{(y, f^{-1}(y)) : y \in f(X)\} = \{(f(x), x) : x \in X\}$$

ovvero  $(x, y) \in \mathcal{G}(f) \leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{G}(f^{-1})$  i.e si dispongono in modo simmetrico rispetto alla retta bisettrice del I-III quadrante



# Esempio di inversa per via grafica

Dato il grafico  $f$  derivare il grafico della sua inversa  $f^{-1}$





FINE