

Maggioranti, massimo ed estremo superiore: primi esercizi

Elementi di teoria degli insiemi

Manolo Venturin

~~~ 3 ~~~

# Indice (corso Analisi Matematica 1)

Determinare, se esistono,  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\max A$  e  $\min A$  di

1.  $A = \left\{ \frac{2-n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

2.  $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$

3.  $A = \{n^2 + 4n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$

4.  $A = \left\{ \frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$

5.  $A = \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Esercizi

# Esercizio 1

Determinare, se esistono,  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\max A$  e  $\min A$  di

$$A = \left\{ \frac{2-n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

## Soluzione

Osserviamo che

$$\frac{2-n}{n+1} = \frac{-(n+1-2-1)}{n+1} = -1 + 3\frac{1}{n+1}$$

e

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

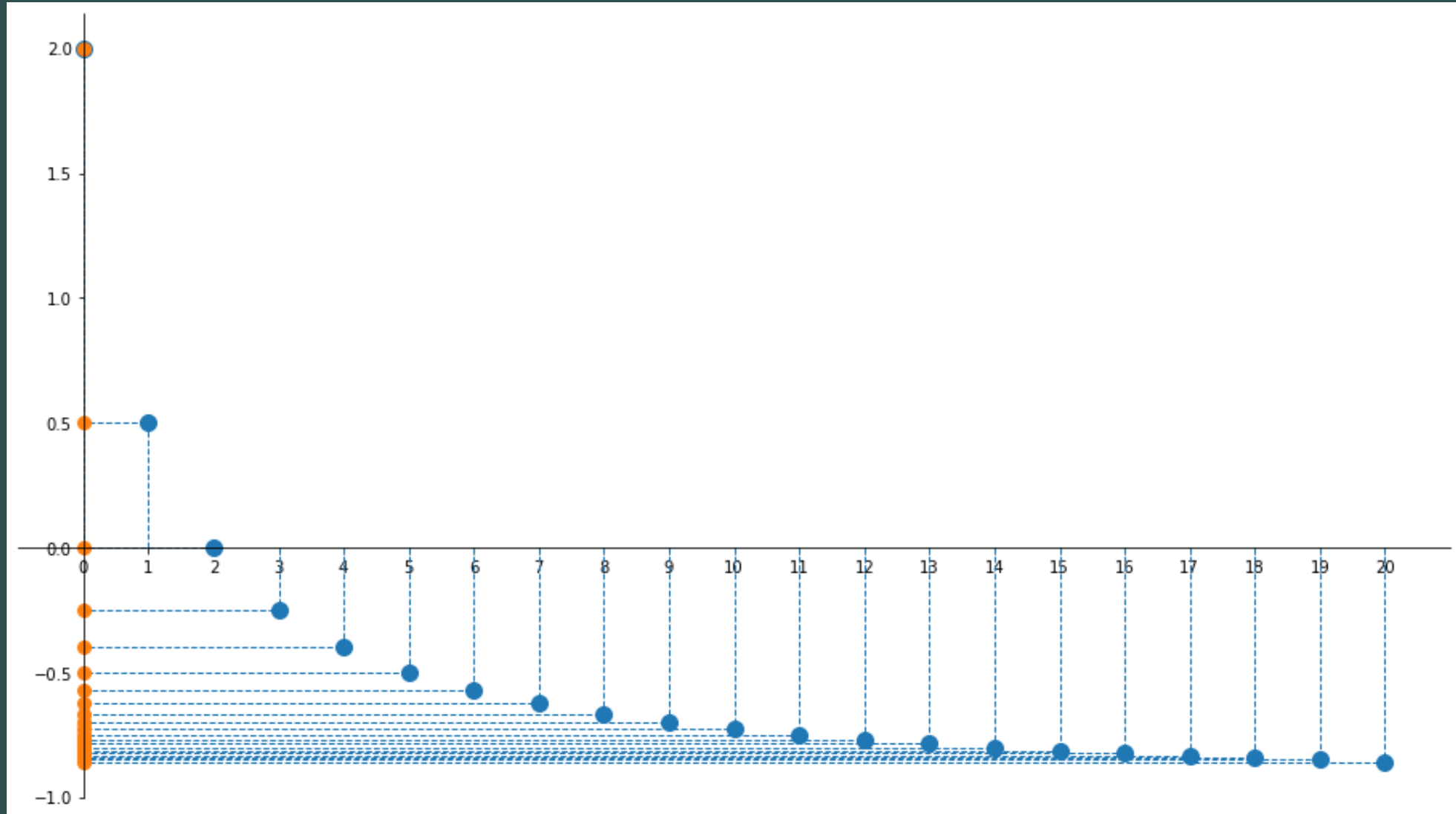
# Esercizio 1

$$\frac{2-n}{n+1} = -1 + 3\frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad 0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quindi,

- $\sup A = -1 + 3 = 2 = \max A$
- $\inf A = -1$  (non è mai assunto)

# Esercizio 1 (visualizzazione grafica)



# Esercizio 2

Determinare, se esistono,  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\max A$  e  $\min A$  di

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$$

## Soluzione

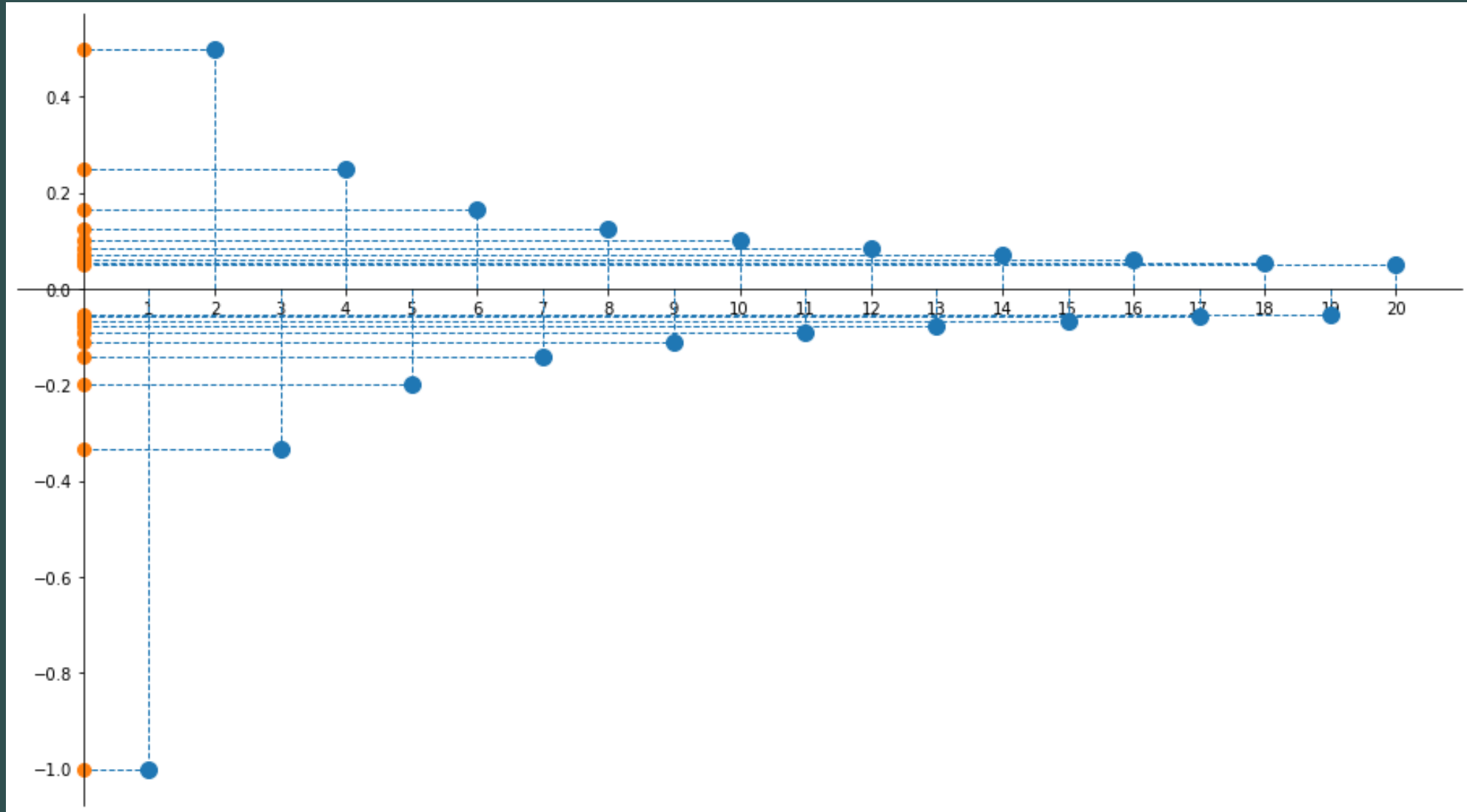
Osserviamo che

- Se  $n$  è pari  $\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$  (2 è il primo numero pari)
- Se  $n$  è dispari  $\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \geq -1$  (1 è il primo numero dispari)

Quindi

- $\max A = \sup A = \frac{1}{2}$
- $\min A = \inf A = -1$

# Esercizio 2 (visualizzazione grafica)



# Esercizio 3

Determinare, se esistono,  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\max A$  e  $\min A$  di

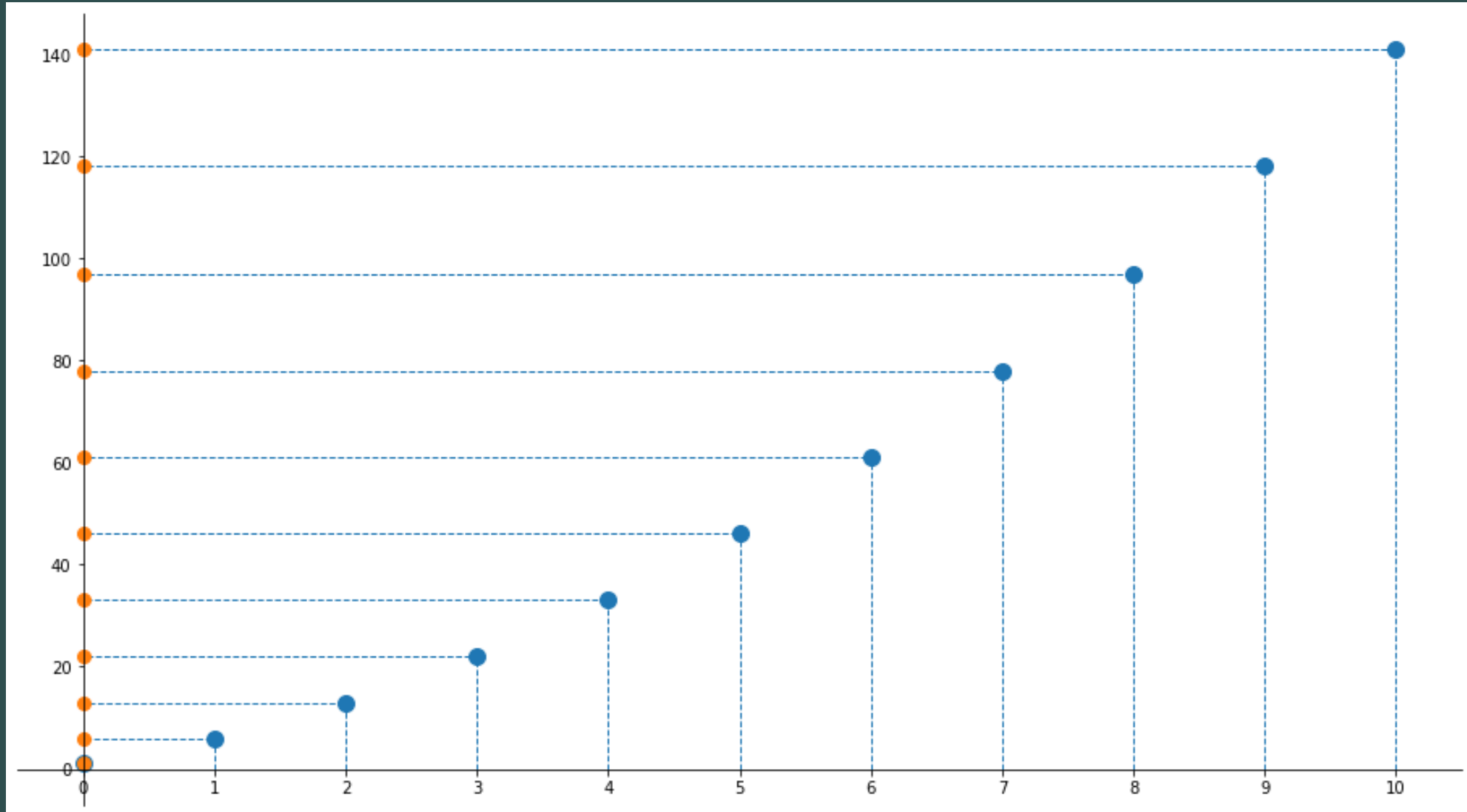
$$A = \{n^2 + 4n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

## Soluzione

(Andate a vedere come si disegna una parabola)

- Il polinomio  $n^2 + 4n - 1$  è crescente per  $n \geq 0$  quindi il suo minimo è raggiunto per  $n = 0$  e quindi  $\min A = \inf A = -1$
- Il polinomio  $n^2 + 4n - 1$  non è limitato superiormente, quindi  $\sup A = +\infty$  (non esiste massimo)

# Esercizio 3 (visualizzazione grafica)



# Esercizio 4

Determinare, se esiste,  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\max A$  e  $\min A$  di

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

## Soluzione

Si ha

- per  $n \geq 0$  si ha

- $\frac{2n}{n^2+1} \geq 0$  (termini positivi)

- $\frac{2n}{n^2+1} \leq 1$  infatti

$$2n \leq n^2 + 1 \iff n^2 - 2n + 1 \geq 0 \iff (n - 1)^2 \geq 0$$

- per  $n = 0 \implies \frac{2n}{n^2+1} = 0$  e per  $n = 1 \implies \frac{2n}{n^2+1} = 1$

# Esercizio 4

Determinare, se esiste,  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\max A$  e  $\min A$  di

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

## Soluzione

- per  $n \leq 0$  si ha
  - $\frac{2n}{n^2+1} \leq 0$  (numeratore negativo, denominatore positivo)
  - $\frac{2n}{n^2+1} \geq -1$  infatti
$$2n \geq -(n^2 + 1) \iff n^2 + 2n + 1 \geq 0 \iff (n + 1)^2 \geq 0$$
  - per  $n = 0 \implies \frac{2n}{n^2+1} = 0$  e per  $n = -1 \implies \frac{2n}{n^2+1} = -1$

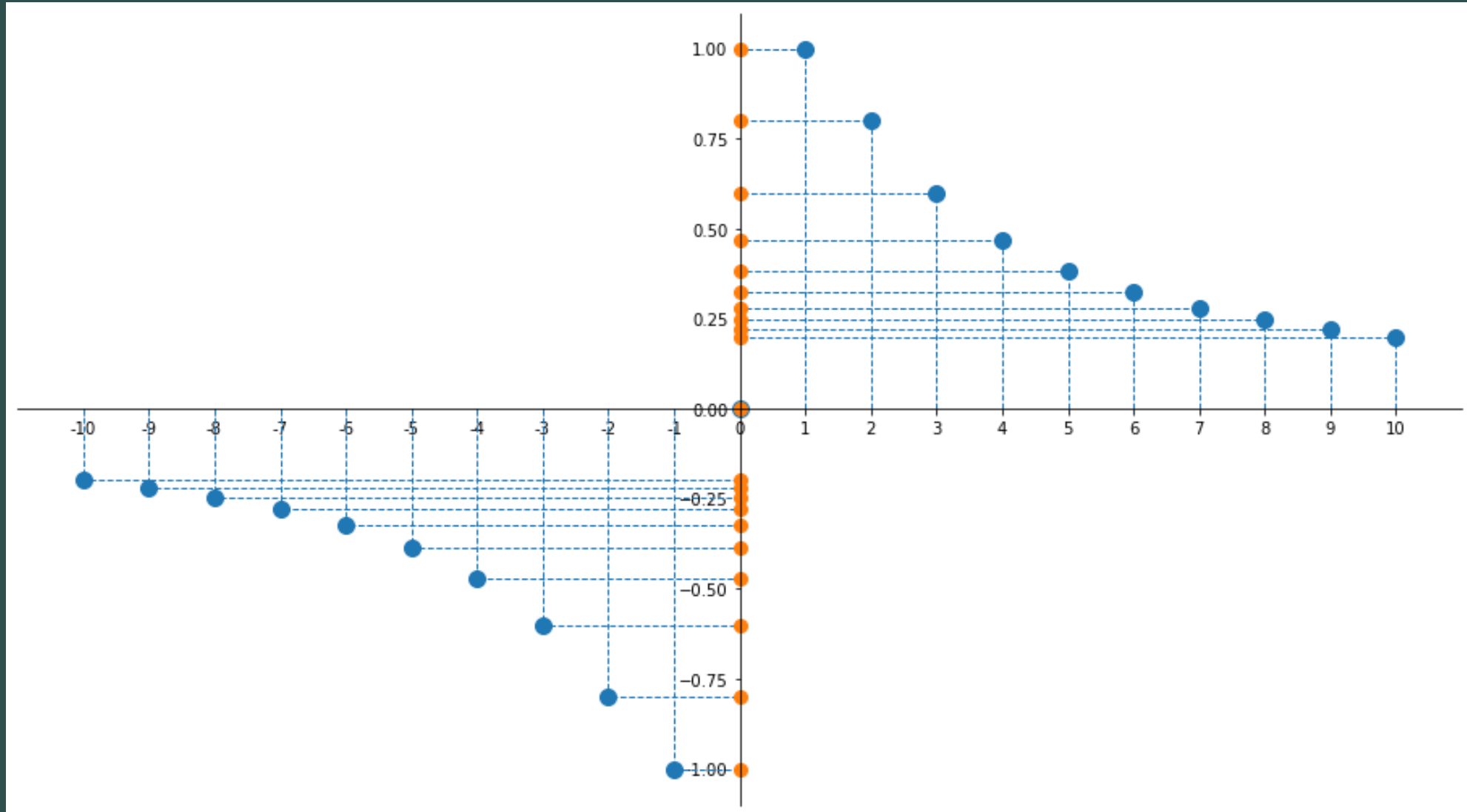
# Esercizio 4

$$-1 \leq \frac{2n}{n^2 + 1} \leq 1$$

Quindi

- $\min A = \inf A = -1$
- $\max A = \sup A = 1$

# Esercizio 4 (visualizzazione grafica)



# Esercizio 5

Determinare, se esistono,  $\sup A$ ,  $\inf A$ ,  $\max A$  e  $\min A$  di

$$A = \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0 \right\}$$

## Soluzione

Osserviamo che

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = \frac{1 - n}{n^2}$$

e per  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n > 0$  è

$$\frac{1 - n}{n^2} \leq 0 \quad (1 - n \leq 0)$$

# Esercizio 5

$$\frac{1-n}{n^2} \leq 0 \quad (1-n \leq 0)$$

Per  $n = 1$  si ha  $\frac{1-n}{n^2} = 0$ , quindi

$$\max A = \sup A = 0$$

# Esercizio 5

$$\frac{1-n}{n^2} \leq 0 \quad (1-n \leq 0)$$

Proviamo a risolvere la seguente disequazione  $\frac{1-n}{n^2} \geq -\alpha$  con  $\alpha > 0$

Questa è equivalente a  $1-n \geq -\alpha n^2 \iff \alpha n^2 - n + 1 \geq 0$

Scegliendo  $\alpha = \frac{1}{2}$ , si può completare il quadrato e si ottiene che  $\left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 \geq 0$

Quindi  $-\frac{1}{2}$  è un **minorante** per  $A$

# Esercizio 5

$$\frac{1-n}{n^2} \leq 0 \quad (1-n \leq 0)$$

Punto chiave: è una successione crescente a partire da un certo  $n_0$

Infatti

$$\left( \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1} \right) > \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n^2 - (n+1)^2}{n^2(n+1)^2} > \frac{n - (n+1)}{n(n+1)}$$

$$-2n - 1 > -n(n+1) \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 - n - 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad n(n-1) > 1$$

che risulta vera per  $n \geq 2$

# Esercizio 5

$$\frac{1-n}{n^2} \leq 0 \quad (1-n \leq 0)$$

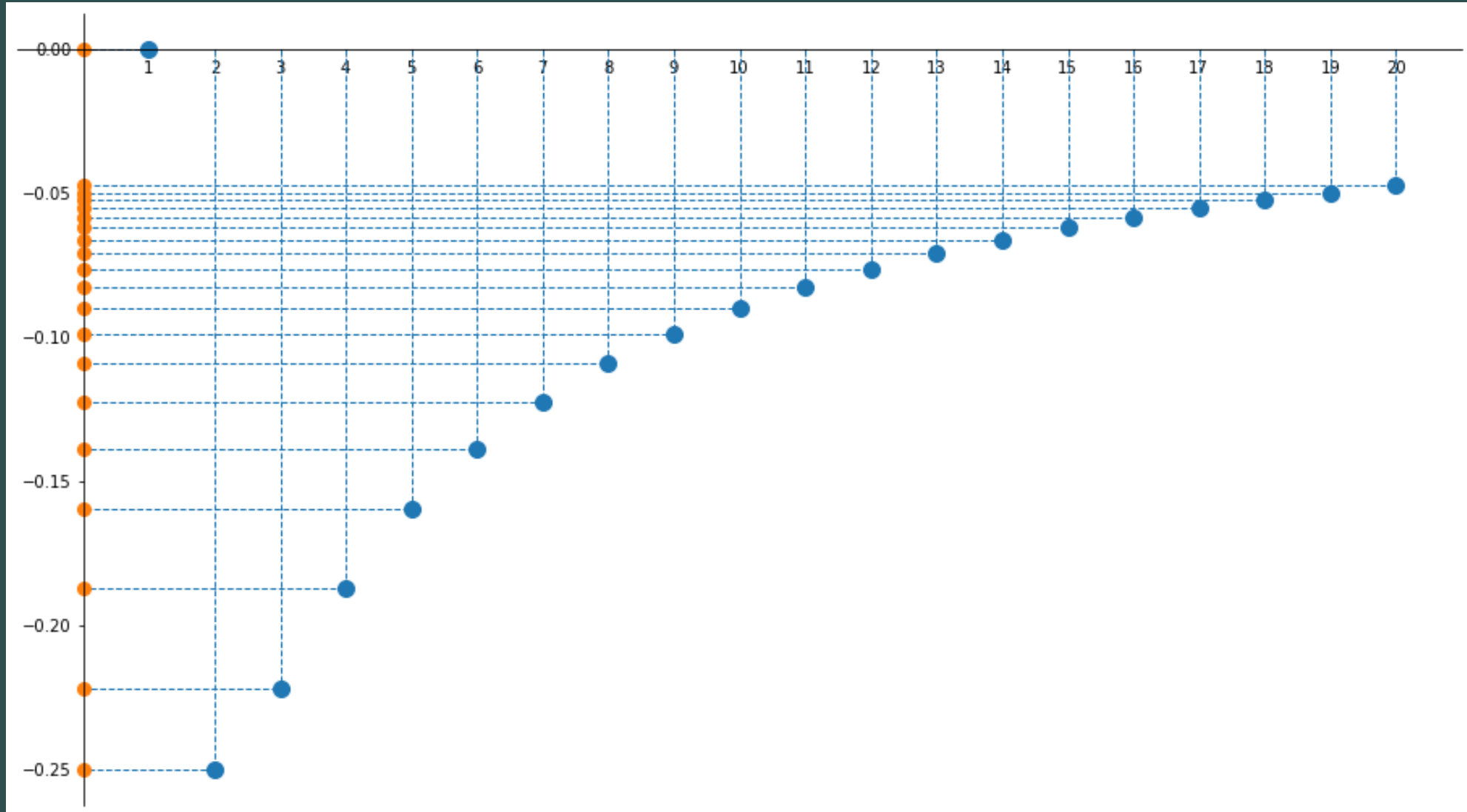
e crescente per  $n \geq 2$

Valutando l'espressione per  $n = 1, 2$  si vede che il minimo è ottenuto per  $n = 2$  e vale  $-\frac{1}{4}$

Quindi,

$$\min A = \inf A = -\frac{1}{4}$$

# Esercizio 5 (visualizzazione grafica)



A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE