Maggiorante, massimo e estremo superiore

Elementi di teoria degli insiemi

Manolo Venturin

~~~ 3 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Maggiorante e minorante
- Massimo e minimo
- Estremo superiore e estremo inferiore
- Interpretazione grafica della successione

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Maggiorante (risp. minorante)

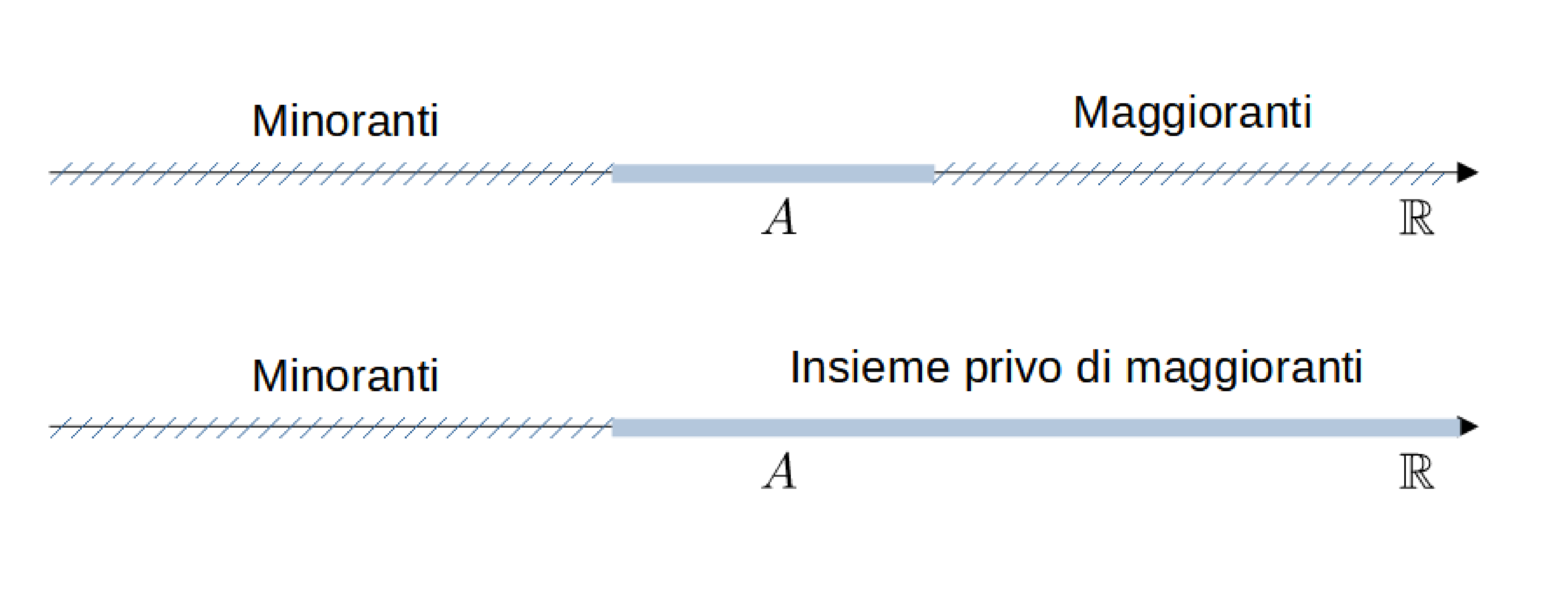
> **Definizione**
> Sia X un insieme ordinato sia $A \subseteq X$ non vuoto.
> Un elemento k di X è un **maggiorante** (risp. **minorante**) di A se
>
> 1. k è confrontabile con ogni elemento di A
> 2. $\forall x \in A$: $x \preceq k$ (risp. $x \succeq k$)

Nota:

- A può non avere maggioranti, ne può avere uno solo o più di uno

Esempio

- Se $A \subseteq \mathbb{R}$, x è un maggiorante di A se e solo se $a \leqslant x$ per ogni $a \in A$
- Se $A \subseteq \mathbb{R}$, x è un minorante di A se e solo se $a \geqslant x$ per ogni $a \in A$



Altre definizioni

> Se esiste almeno un maggiorante (minorante) l’insieme viene detto **limitato superiormente** (inferiormente)
>
> Si dice **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente

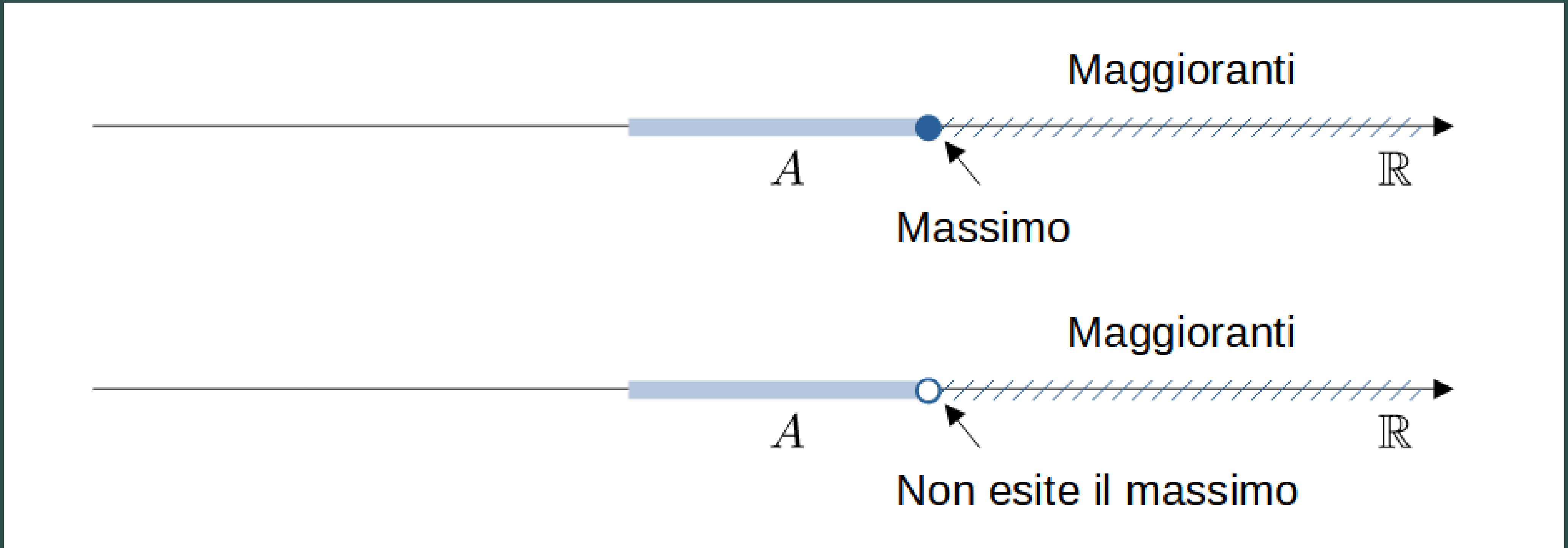
Massimo (risp. minimo)

> **Definizione**
> Sia X un insieme ordinato sia $A \subseteq X$ non vuoto.
> Un elemento m di X si dice **massimo** (risp. **minimo**) di A, $\max A$ (risp. $\min A$) se:
>
> - $m \in A$
> - m è un maggiorante (risp. minorante) di A

Nota:

- Non tutti gli insiemi sono dotati di massimo o di minimo
- Il massimo (o il minimo) di A se esiste è unico

Massimo (risp. minimo)



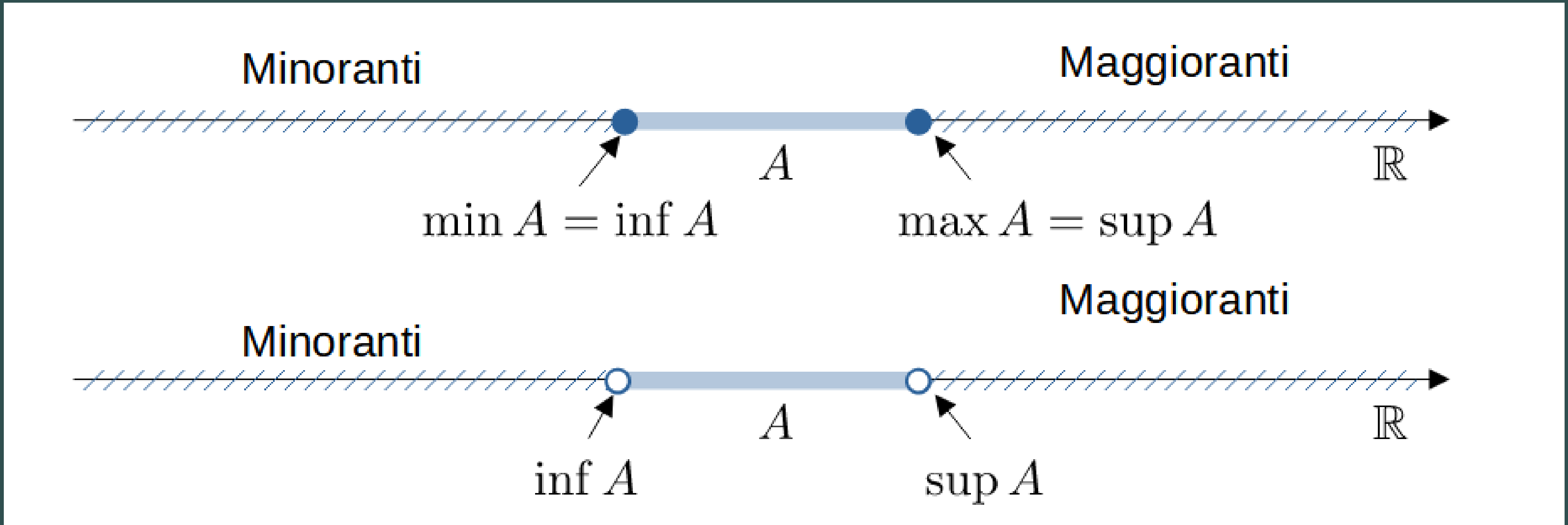
Estremo superiore (risp. inferiore)

> **Definizione**
> $\sup A$ (risp. $\inf A$) è il minimo (massimo) dei maggioranti (minoranti) di A, se esiste

Si ha

- L'estremo superiore (risp. inferiore) se esiste è unico
- Se m è il massimo (risp. minimo) di A esso coincide con $\sup A$ (risp. $\inf A$)
- Se A non è superiormente (risp. inferiormente) limitato scriveremo $\sup A = +\infty$ (risp. $\inf A = -\infty$)
- A può essere limitato superiormente (risp. inferiormente) e non ammettere massimo (risp. minimo)

Estremo superiore (risp. inferiore)



Esempi

Esempio 1

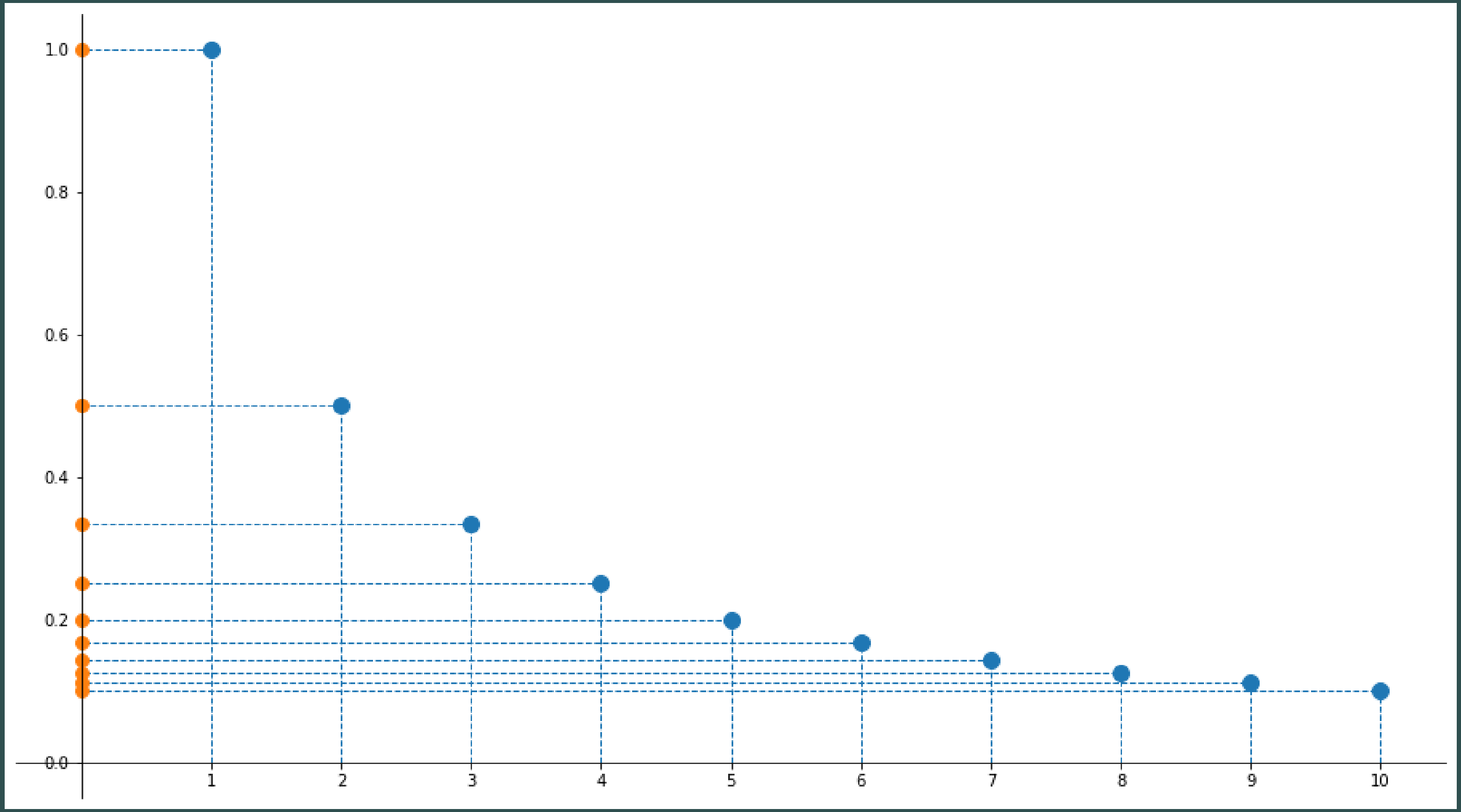
> Determinare, se esiste, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$ di
>
> $$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1 \right\}$$

Soluzione

Si ha

- da $\frac{1}{n} \geqslant 0$ si ha che 0 è un minorante di A con $\inf A = 0$
- da $\frac{1}{n} \leqslant 1$ si ha che 1 è un maggiorante di A con $\sup A = 1$
- $\max A = 1$ è il massimo di A (assunto per $n = 1$)
- 0 non è un minimo di A in quanto non viene mai raggiunto

Esempio 1 (interpretazione grafica della successione)



Esempio 2

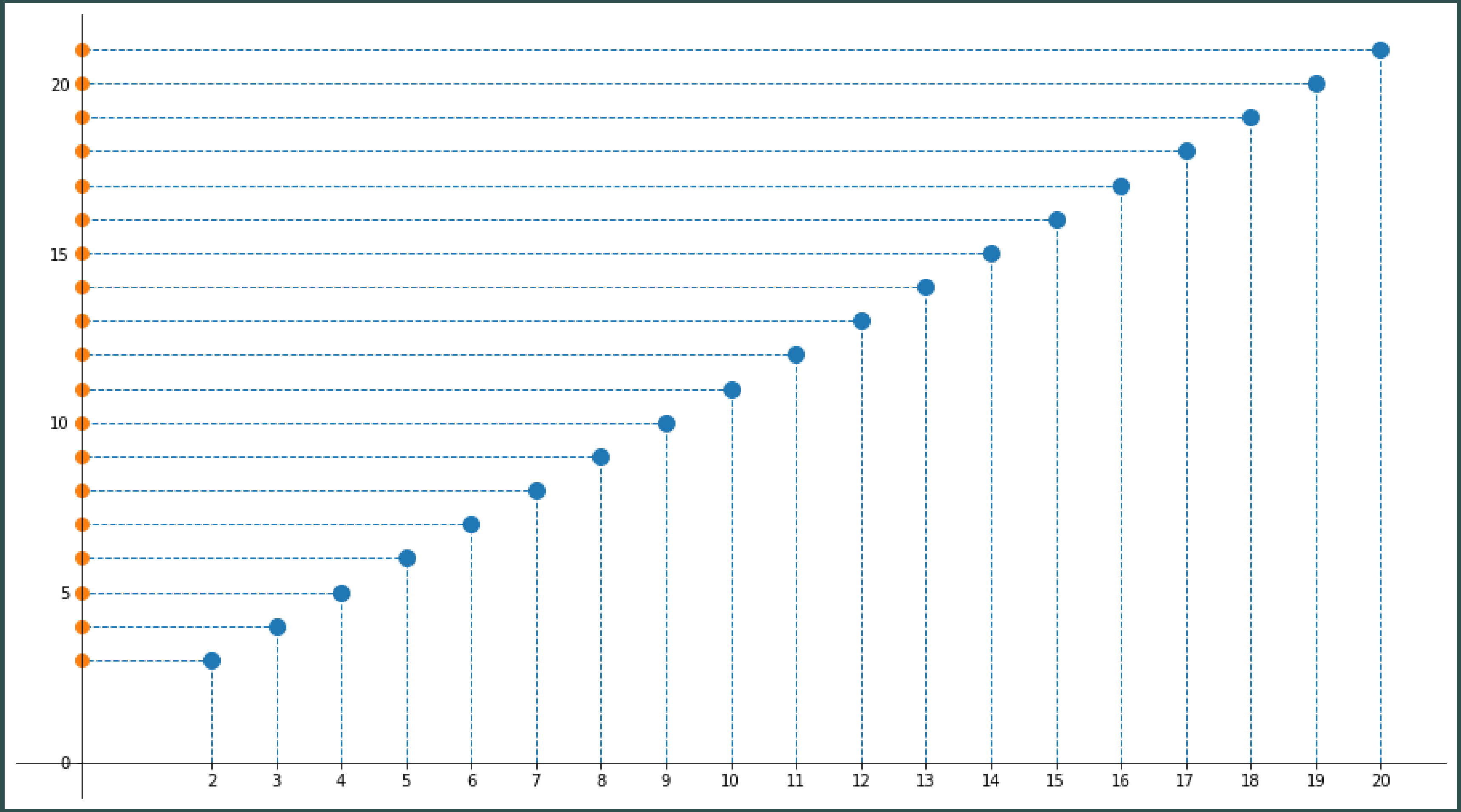
> Determinare, se esiste, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$ di
>
> $$A = \left\{ \frac{1-n^2}{1-n} : n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \right\}$$

Soluzione

Si ha

- $\frac{1-n^2}{1-n} = \frac{(1-n)(1+n)}{1-n} = 1 + n$
- $\inf A = 1 + 2 = 3 = \min A$
- $\sup A = +\infty$

Esempio 2 (interpretazione grafica della successione)



Esempio 3

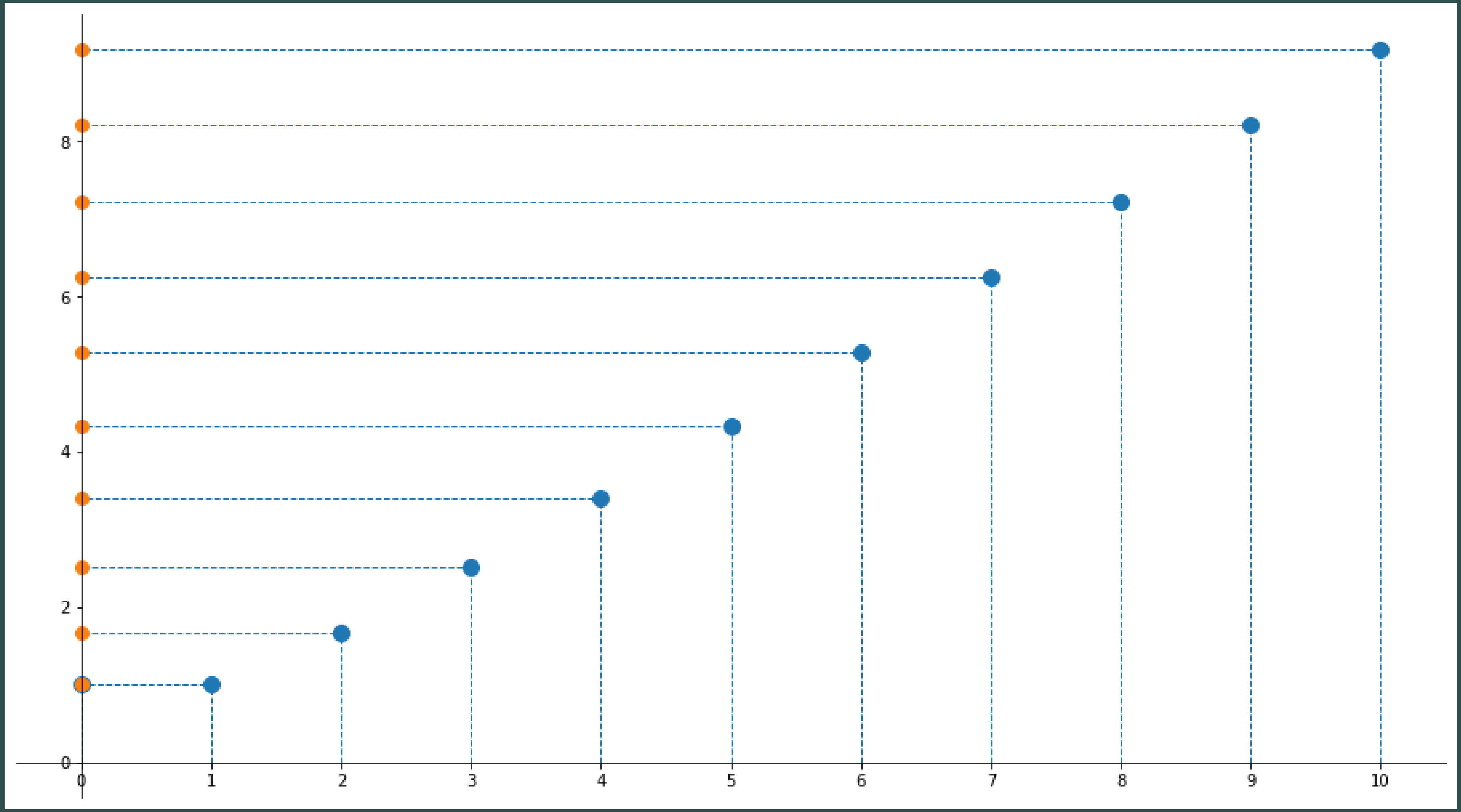
> Determinare, se esiste, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$ di
>
> $$A = \left\{ \frac{n^2+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Soluzione

Si ha

- $\frac{n^2+1}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)+2}{n+1} = n - 1 + \frac{2}{n+1}$
- $\sup A = +\infty$
- E' inferiormente limitato in quanto sia $n-1$ che $\frac{2}{n+1}$ sono inf. limit.
- Da $\frac{2}{n+1} < 1$ per $n > 1$ cioè per $n \geqslant 2$ si ha che (valutazione per $n = 0$ e $n = 1$)
  $\min A = 1$

Esempio 3 (interpretazione grafica della successione)




FINE