Insiemi: relazioni

(prodotto cartesiano, relazioni d'ordine e di equivalenza)

Elementi di teoria degli insiemi

Manolo Venturin

~~~ 3 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Prodotto cartesiano
- Relazioni d’ordine
- Relazioni di equivalenza

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Prodotto cartesiano

Definizione

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A,\ y \in B\}$$

Il prodotto cartesiano $A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie ordinate (x, y) con con $x \in A$ e $y \in B$

Nota:

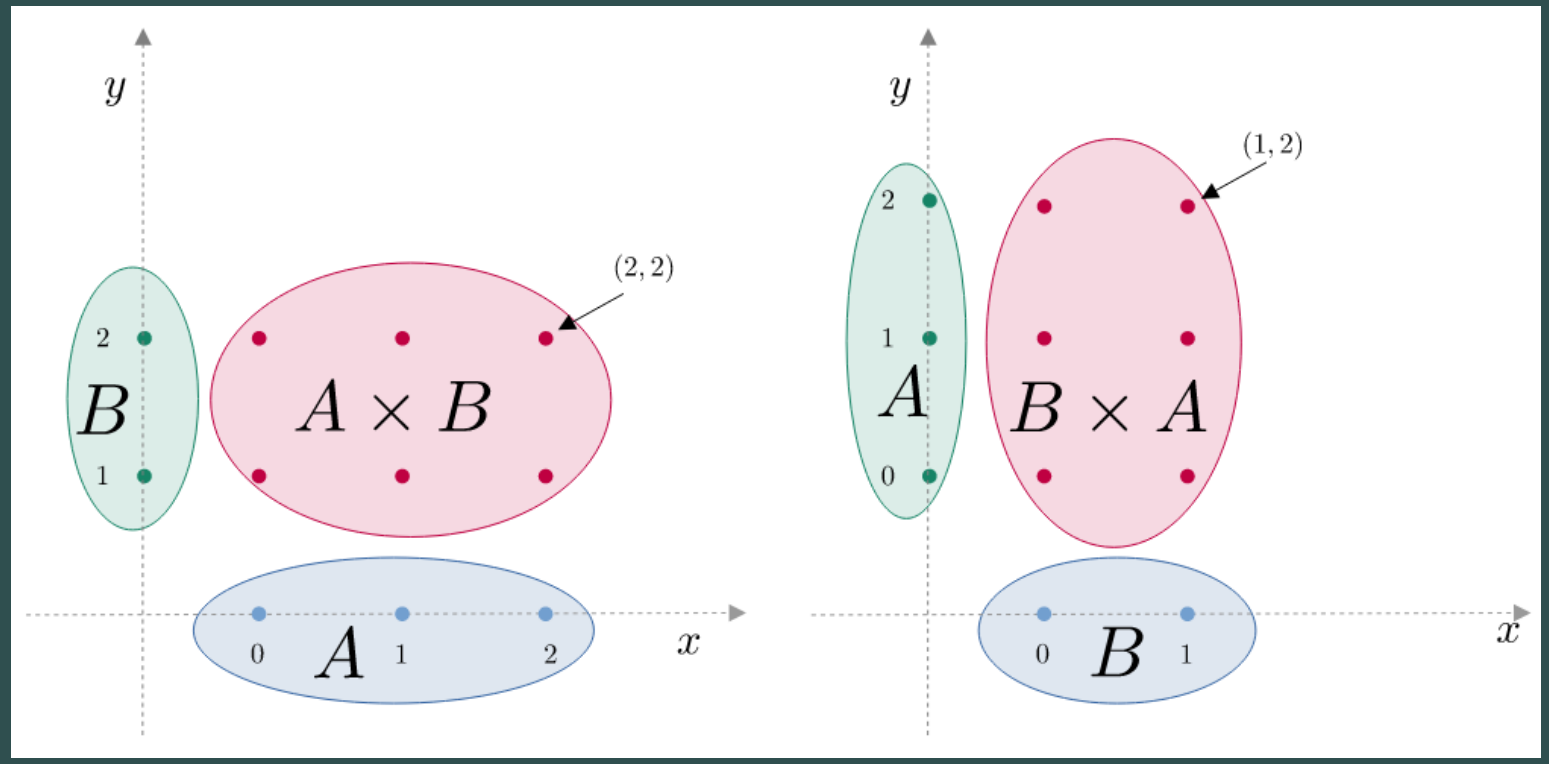
- $A \times B \neq B \times A$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

Se $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ e $B = \{1,\ 2\}$ allora

- $A \times B = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$
- $B \times A = \{(1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Relazioni notevoli

Le relazioni formalizziamo i concetti di

- **equivalenza**
- e di **ordinamento**
- sono alla base della definizione di funzione (che vedremo più avanti)

> **Definizione di relazione**
> Una relazione $\mathcal{R}$ tra due insieme A e B, indicata con $A\mathcal{R}B$, è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, i.e.
> $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ sse $(a, b) \in \mathcal{R}$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Relazione di equivalenza

$\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in A e la indicheremo con $a \approx b$ se verifica le proprietà:

1. **riflessiva**: $\forall a \in A: a \approx a$
2. **simmetrica**: $\forall a, b \in A,\ (a \approx b) \implies (b \approx a)$
3. **transitiva**: $\forall a, b, c \in A: (a \approx b) \land (b \approx c) \implies a \approx c$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

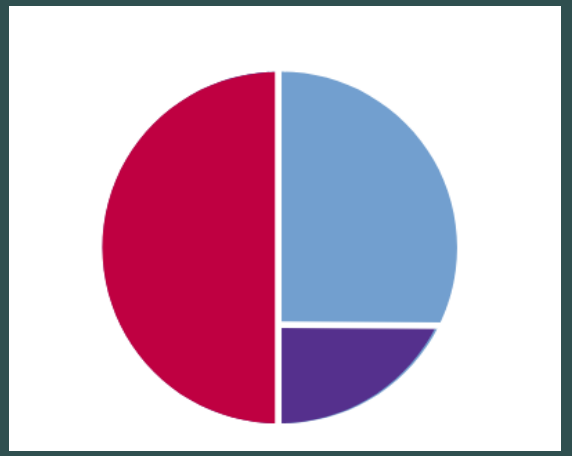
Esempi di relazioni di equivalenza sono:

- nelle frazioni, l'uguale a, ad esempio $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \dots$
- la misura degli angoli (sono congruenti modulo $360^\circ = 2\pi$)
  - $0^\circ = 360^\circ = -360^\circ = 720^\circ = \dots$
- il parallelismo tra rette nello spazio
- la similitudine tra triangoli

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Partizioni / classi di equivalenza

Le relazioni di equivalenza definiscono delle **partizioni** o **classi di equivalenza** e si indica con $[a]_{\mathcal{R}} = \{b \in A : a \mathcal{R} b\}$



Ad esempio, la frazione $\frac{1}{2}$ (numeratore e denominatore primi tra loro) si può vedere come rappresentante delle infinite frazioni

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \dots$$

Quindi l'elemento $\frac{1}{2}$ è il rappresentante principale di tale classe

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Importante

Perché le relazioni di equivalenza sono importanti?

- L’uso di una relazione di equivalenza permette di decomporre l’insieme in sottoinsiemi disgiunti detti partizioni di equivalenza
- Se dimostriamo un teorema per un elemento della classe allora vale per tutti gli elementi della stessa classe

Ad esempio: il teorema di Pitagora si applicata a tutti i triangoli rettangoli e la condizione di essere un traingolo rettagolo o meno forma una classe di equivalenza

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Relazione d'ordine

$\mathcal{R}$ è una relazione d'ordine in A e la indicheremo con $a \preceq b$ (a precede b) se verifica le proprietà:

1. **riflessiva**: $\forall a \in A: a \preceq a$
2. **antisimmetrica**: $\forall a, b \in A, (a \preceq b) \land (b \preceq a) \implies a = b$
3. **transitiva**: $\forall a, b, c \in A, (a \preceq b) \land (b \preceq c) \implies a \preceq c$

Se, presi due elementi a e b in A, possiamo stabilire che $a \preceq b$ oppure $b \preceq a$ (dicotomia) allora **l'ordinamento si dirà totale**, altrimenti parziale

Useremo il simbolo $\leqslant$ per gli insiemi numerici

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Altre relazione d'ordine

Da una relazione d'ordine $\preceq$ su A possiamo definire le seguenti relazioni:

- $a \succeq b$ sse $b \preceq a$ (a segue o è uguale a b se b precede o è uguale a a)
- $a \prec b$ sse $a \preceq b$ e $a \neq b$
- $a \succ b$ sse $b \prec a$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio sui numeri naturali

La relazione $\leqslant$ nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{N}$ si identifica con l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon x \leqslant y\}$$

E' una relazione d'ordine, infatti:

- **riflessiva**: $n \leqslant n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- **antisimmetrica**: $\forall m, n \in \mathbb{N}, (m \leqslant n) \land (n \leqslant m) \implies m = n$
- **transitiva**: $\forall m, n, p \in \mathbb{N}, (m \leqslant n) \land (n \leqslant p) \implies m \leqslant p$
- **dicotomia**: presi due elementi li possiamo sempre confrontare

Quindi $\mathbb{N}$ è **totalmente ordinato**

Nota:

- La relazione $<$ non è una relazione d'ordine (non è riflessiva)
- Si può dimostrare che $\mathbb{R}$ è dotato di un ordinamento totale $\leqslant$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Curiosità

- Il padre della teoria degli insiemi è: Cantor (1845 - 1918)
- Cantor capì che gli insiemi infiniti potevano avere due tipi di cardinalità (numerabile e più che numerabile)
- Dimostrò che l'insieme di tutti i numeri razionali è numerabile mentre l'insieme dei numeri reali è più che numerabile

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)