Insiemi definizione e operazioni base

(Sottoinsiemi / Insieme delle parti / unione, intersezione e complementazione)

Elementi di teoria degli insiemi

Manolo Venturin

~~~ 3 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Definizione di insieme
- Sottoinsieme / contenuo
- Unione
- Intersezione
- Differenza e differenza simmetrica
- Complementarietà
- Proprietà insiemistiche

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Definizione
(un po’ vaga ma va bene così)

> **Insieme**: una collezione di oggetti detti elementi

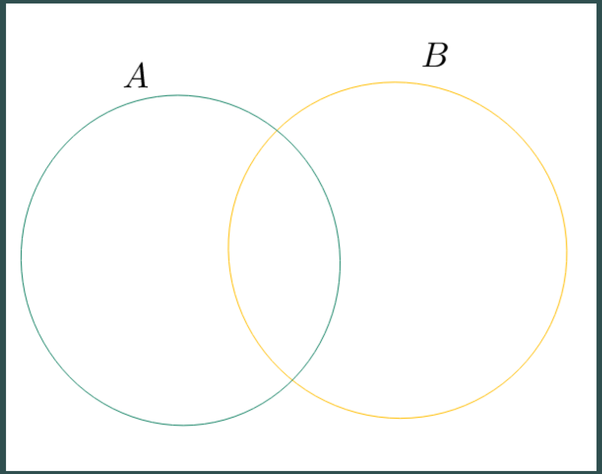
Sinonimi: collezione / famiglia / classe / aggregato

Come descrivere un insieme

- per **elencazione**: $A = \{x, y, z, \ldots\}$
  - ad esempio: $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

- per **definizione**: $A = \{x \in \mathcal{U} \colon P(x)\}$ (sono gli elementi di $\mathcal{U}$ tali che il predicato P è vero)
  - ad esempio: $A = \{x \in \mathbb{N} \colon 6 \leqslant x \leqslant 10\} = \{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

Graficamente gli insiemi si rappresentazione attraverso i **Diagrammi di Venn**



Notazione

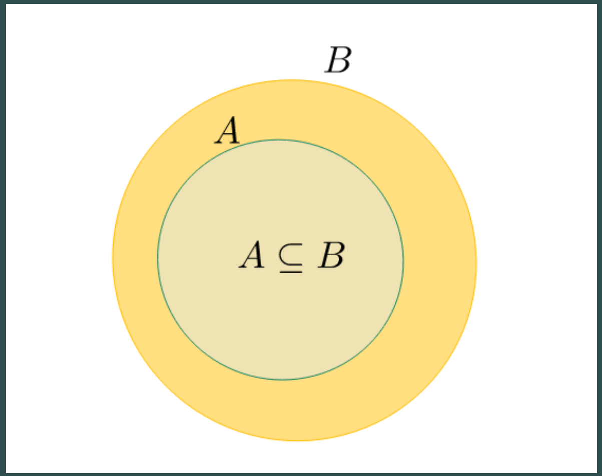
- $x \in A$: x appartiene ad A (o x è un elemento di A)
- $x \notin A$: x non appartiene ad A
- $\emptyset$: l'insieme vuoto
- Cardinalità di un insieme ovvero il numero dei suoi elementi (si indica con $|A|$)

Sottoinsieme / contenuo: $A \subseteq B$ o $B \supseteq A$

> Se A, B sono insiemi, A è sottoinsieme di B se ogni elemento di A è anche elemento di B
>
> $$A \subseteq B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in A \colon x \in B$$

Nota:

- $A \subseteq B$ si legge A è contenuto in B
- $B \supseteq A$ si legge B contiene A
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$



Sottoinsieme proprio:

$A \subset B$ o $B \supset A$

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in A \colon x \in B \quad \text{e} \quad \exists y \in B \colon y \notin A$$

Uguaglianza: $A = B$

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Insieme delle parti

> Insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$: l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A

Esempio

Se $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ allora

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

In totale $2^{|A|} = 2^3 = 8$ elementi

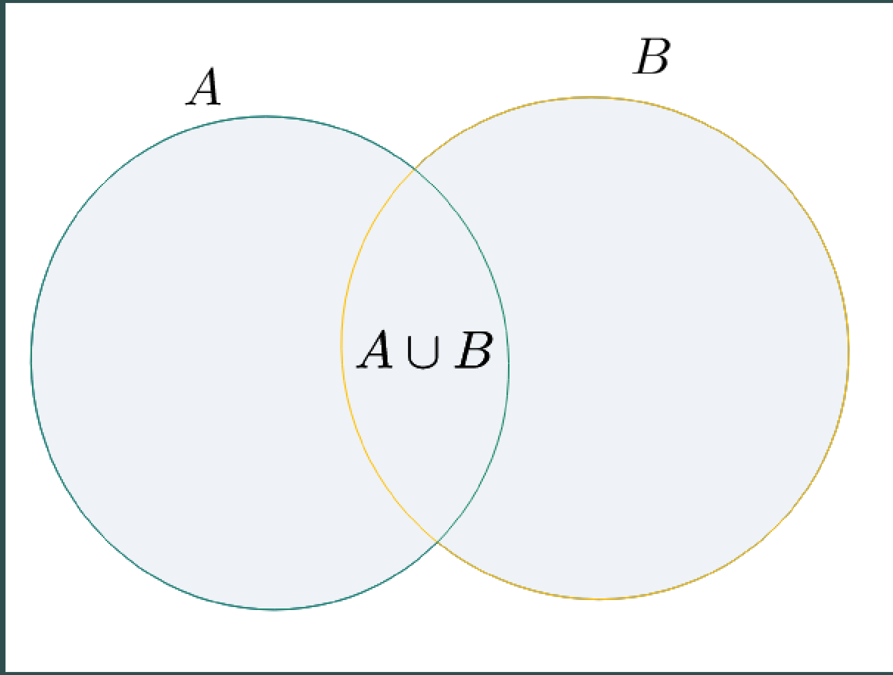
Operazioni con gli insiemi

Unione

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

Nota:

- Gli elementi di A e quelli di B
- $A \cup \emptyset = A$



Esempio

Se

$$A = \{0,\ 1,\ 2\} \quad \text{e} \quad B = \{1,\ 2,\ 3\}$$

allora

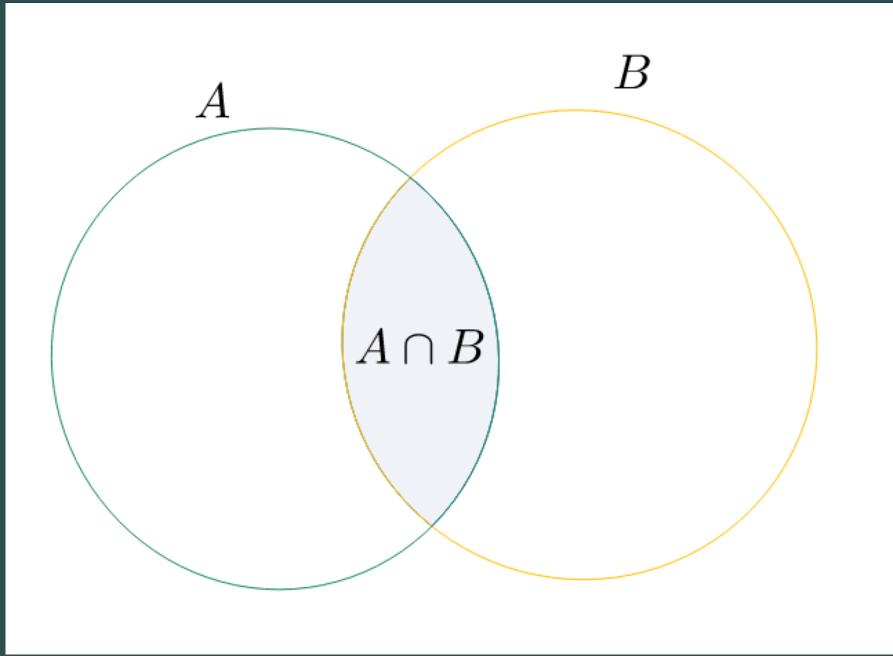
$$A \cup B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

Intersezione

> $A \cap B = \{x\colon x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

Nota:

- Gli elementi comuni di A e B
- $A \cap \emptyset = \emptyset$



Esempio

Se

$$A = \{0,\ 1,\ 2\} \quad \text{e} \quad B = \{1,\ 2,\ 3\}$$

allora

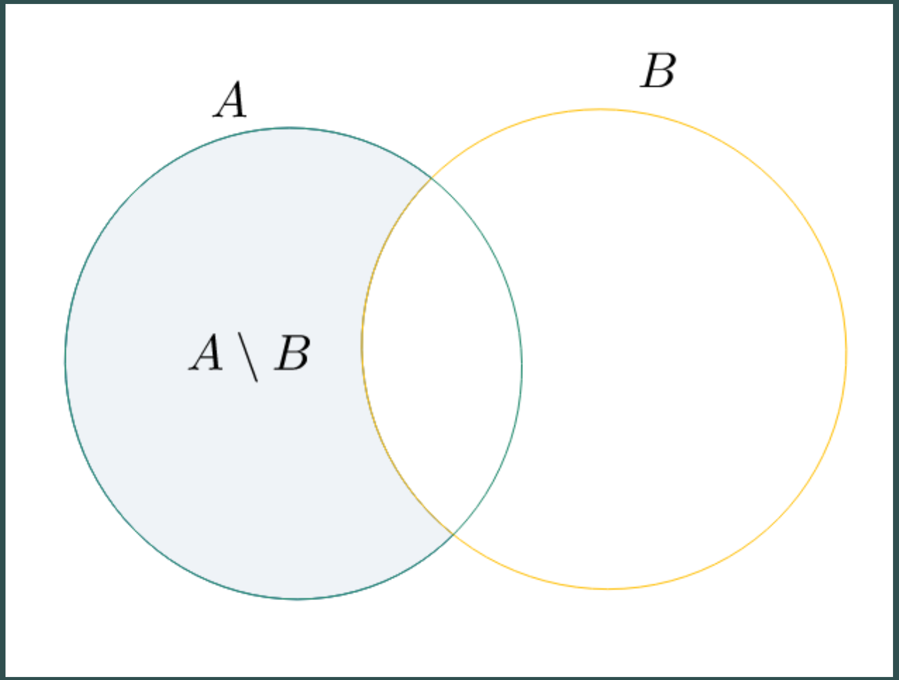
$$A \cap B = \{\ 1,\ 2\}$$

Differenza

> $$A \setminus B = \{x \colon x \in A \;\wedge\; x \notin B\}$$

Nota:

- Gli elementi di A che non sono elementi di B
- $A \setminus B \neq B \setminus A$



Esempio

Se

$$A = \{0,\ 1,\ 2\} \quad \text{e} \quad B = \{1,\ 2,\ 3\}$$

allora

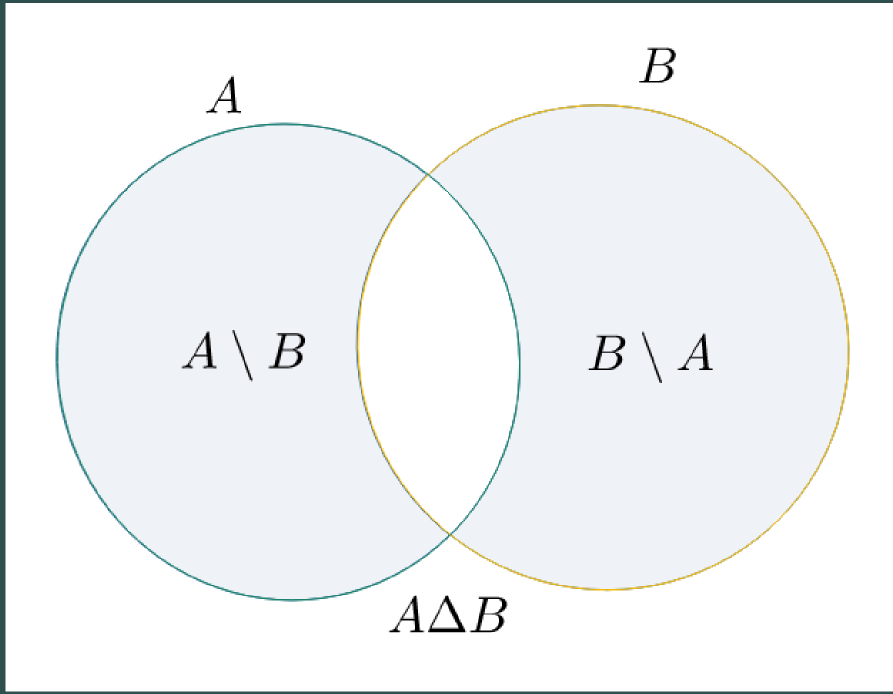
$$A \setminus B = \{0\}$$

Differenza simmetrica

> $$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \;\cup\; (B \setminus A)$$

Nota:

- Gli elementi di A che non sono elementi di B unito gli elementi di B che non sono di A



Esempio

Se

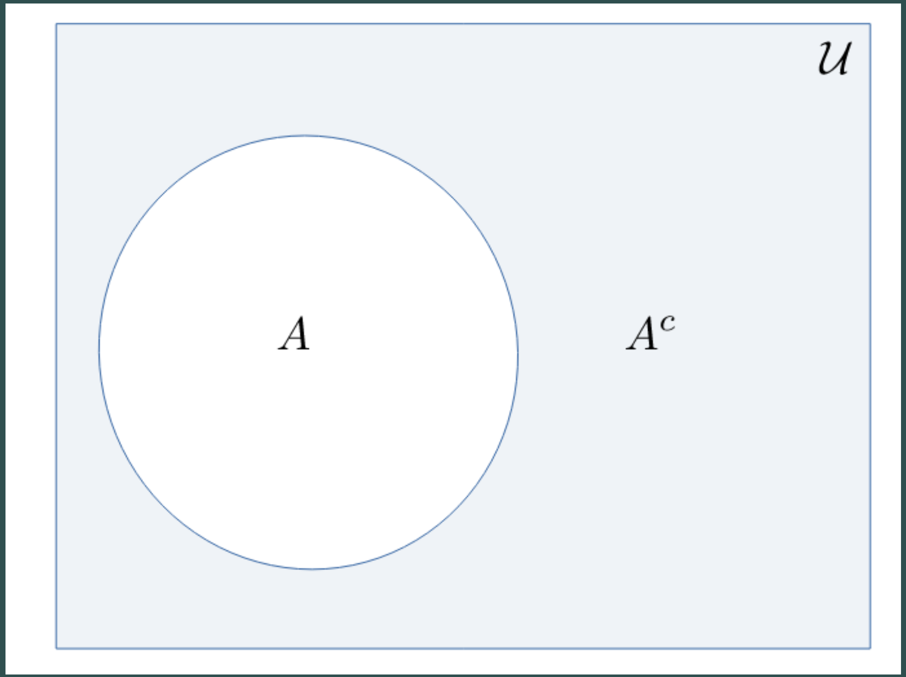
$$A = \{0,\ 1,\ 2\} \quad \text{e} \quad B = \{1,\ 2,\ 3\}$$

allora

$$A \mathbin{\Delta} B = \{0,\ 3\}$$

Insieme complementare (complementazione)

> Se $A \subseteq \mathcal{U}$ allora $A^c = \mathcal{U} \setminus A = \{x\colon x \in \mathcal{U} \ \wedge \ x \notin A\}$



Esempio

Se

$$A = \{x \in \mathbb{N} \colon x \leqslant 8\}$$

e

$$U = \{x \in \mathbb{N} \colon x \leqslant 10\}$$

allora

$$A^c = \{9,\ 10\}$$

Proprietà

Unione

- Idempotenza: $A \cup A = A$
- Commutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Di assorbimento: $A \cup (A \cap B) = A$
- Di inclusione: $A \subseteq B \iff (A \cup B = B)$

Intersezione

- Idempotenza: $A \cap A = A$
- Commutativa: $A \cap B = B \cap A$
- Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Di assorbimento: $A \cap (A \cup B) = A$
- Di inclusione: $A \subseteq B \iff (A \cap B = A)$

Complementarietà

- De Morgan unione: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- De Morgan intersezione: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- Involutoria: $(A^c)^c = A$
- Leggi complementari:
  - $A \cup A^c = \mathcal{U}$
  - $A \cap A^c = \emptyset$
  - $\emptyset^c = \mathcal{U}$
  - $\mathcal{U}^c = \emptyset$
  - Se $A \subseteq B$ allora $B^c \subseteq A^c$

Curiosità

- I diagrammi di Venn (1834–1923) furono introdotti per spiegare in modo elementare la teoria degli insiemi e della probabilità


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)