Predicati e quantificatori

(e loro negazione)

Elementi di logica

Manolo Venturin

~~~ 2 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- La logica dei predicati
- Quantificatore universale
- Quantificatore esistenziale
- Regola generale per la negazione dei qualificatori

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

La logica dei predicati

> **Definizione**
> **Predicato:** una proposizione che contiene una o più variabili

Il predicato fissate le variabili diventa una proposizione

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

- $P(x) =$ “x è un numero pari”
  - $P(2)$ è vera
  - $P(3)$ è falsa
- $P(x, y) =$ “$x \geqslant y$” (esempi di predicato con due variabili)

Nota

- Il valore di verità del predicato $P(x)$ dipende dal valore assunto dalla variabile x
- Fissare x in $P(x)$ significa trasformare il predicato in una proposizione

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Quantificatori

> **Quantificatori:** utili allo studio del predicato $P(x)$ al variare di x in un dato insieme

Quantificatori:

- $\forall$: Per ogni (quantificatore universale)
- $\exists$: Esiste (quantificatore esistenziale)
- $\exists!$: Esiste ed è unico

Nota

- Attenzione all'ordine dei quantificatori!
- Nel linguaggio comune si ha
  - "nessuno …" che è equivalente a "tutti non …" i.e "per ogni non …"
  - "ci sono …" che è equivalente a "esiste almeno un …"

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

Dato $P(x)$ si ha

- $\forall x$: $P(x)$ significa per ogni x, $P(x)$ è vera
- $\exists x$: $P(x)$ significa esiste (almeno) un x per cui $P(x)$ è vera
- $\exists! x$: $P(x)$ significa esiste un unico x per cui $P(x)$ è vera

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2: quantificatori nel caso di due variabili

Sia $P(x, y)$ l'espressione "$x + y = 0$" con $x, y \in \mathbb{R}$, allora:

- $\forall x, \forall y$: $P(x, y)$: significa per ogni x e y si ha $x + y = 0$ (falsa)
- $\exists x, \exists y$: $P(x, y)$: significa che esistono due numeri x e y tali che $x + y = 0$ (vera)
- $\forall x, \exists y$: $P(x, y)$: significa per ogni x, esiste un y tale che $x + y = 0$ (vera)
- $\exists y, \forall x$: $P(x, y)$: significa esiste un numero y tale che, tutti gli x sono tali che $x + y = 0$ (falsa)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Regola generale per la negazione dei qualificatori

Per negare una proposizione della forma n qualificatori e predicato finale con n variabili, si scambiano i qualificatori $\forall$ e $\exists$ e si nega il predicato finale

Ad esempio nel caso di una variabile:

- $\neg(\forall x\colon P(x))$ è equivalente a $\exists x\colon \neg P(x)$
- $\neg(\exists x\colon P(x))$ è equivalente a $\forall x\colon \neg P(x)$

Ad esempio nel caso di due variabili:

- $\neg\ (\forall x, \exists y\colon P(x,y)) \quad \iff \quad \exists x, \forall y\colon \neg P(x,y)$
- $\neg\ (\exists x, \forall y\colon P(x,y)) \quad \iff \quad \forall x, \exists y\colon \neg P(x,y)$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

Sia

- $P(x)$: x è un numero naturale pari

allora si ha che

- $\neg\forall x$: $P(x)$: non tutti i numeri naturali sono pari

è equivalente a

- $\exists x$: $\neg P(x)$: esiste un numero naturale che non è pari

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

Sia $P(x, y) = y \geqslant x$ allora si ha che

- $\forall x, \exists y$: $y \geqslant x$ ovvero fissato un qualunque numero x esiste un numero y maggiore del numero dato

equivale a

- $\exists x, \forall y$: $y < x$ esiste un numero x maggiore di ogni numero y.

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

$$\neg \forall x, \exists y \colon P(x, y) \quad \iff \quad \exists x, \forall y \colon \neg P(x, y)$$

Sia $P(x, y)$ l'espressione "$x \leqslant y^2$", allora:

- $\neg \forall x, \exists y \colon P(x, y)$ significa negare che per ogni numero x esiste un numero y tale che $x \leqslant y^2$ è equivalente a
- $\exists x, \forall y \colon \neg P(x, y)$ che significa che esiste un numero x che per ogni numero y si ha $x > y$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Ruolo del controesempio

Dimostrare che $\forall x\colon P(x) \implies Q(x)$ è falso equivale a mostrare che:

- $\neg(\forall x\colon P(x) \implies Q(x))$ è vero,
- $\exists x\colon P(x) \land \neg Q(x)$ è vero (il controesempio),
- i.e. ovvero $P(x)$ è vero e $Q(x)$ è falso

cioé devo fornire un esempio in cui le ipotesi sono vere e la tesi è falsa!

Nota: Il valore di verità di $P \implies Q$ è lo stesso di $\neg P \lor Q$ (equivalenza dell'implicazione)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio

Teorema: Dimostrare che

> ogni equazione polinomiale di secondo grado ha almeno una soluzione reale

è una preposizione falsa

Soluzione

Basta fornire un controesempio

Si consideri l'equazione $x^2 + 1 = 0$ che non ha radici reali ($x^2 = -1$)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Curiosità

Tutto il monodo è vero o falso?

No: esiste la **Logica Fuzzy**

In cui un predicato può assumere un valore di verità compreso tra 0 e 1

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)