Regole di deduzione

(Modus ponens / Dimostrazione per assurdo / Irrazionalità di $\sqrt{2}$*)*

Elementi di logica

Manolo Venturin

~~~ 2 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Regole di deduzione
- Strategie dimostrative
  - Modus ponens (ragionamento diretto)
  - Dimostrazione per assurdo (due versioni)
- Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Regole di deduzione

> **Dimostrare un teorema**
> Dedurre nuove affermazioni vere a partire da altre affermazioni

Esempio (sillogismo)

> Dall'ipotesi
>
> $$P = \text{Socrate è un uomo}$$
>
> e dal teorema
>
> $$P \implies Q = \text{l'uomo è mortale}$$
>
> segue (allora) la tesi
>
> $$Q = \text{Socrate è mortale}$$

Dimostrare il teorema significa dimostrare la verità dell'implicazione $P \implies Q$

Strategie dimostrative

- Modus ponens (ragionamento diretto)
- Dimostrazione per assurdo (due versioni)

Modus ponens (ragionamento diretto)

> **Definizione**
> Se P è vera e si vuole provare che Q è vera, si deve dimostrare che $P \implies Q$ è vera

Dimostrazione

Da P e $P \implies Q$ si deduce Q ovvero

$$P \land (P \implies Q) \implies Q$$

La tabella di verità è:

P	Q	$P \implies Q$	$P \land (P \implies Q)$	$P \land (P \implies Q) \implies Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Dimostrazione per assurdo

> **Dimostrazione per assurdo (versione 1)**
> Se P è vera e si vuole provare che Q è vera, si deve dimostrare che $\neg Q \implies \neg P$ è vera

Dimostrazione

$$\neg Q \implies \neg P \iff P \implies Q$$

Dimostrazione per assurdo

> **Dimostrazione per assurdo (versione 2)**
> Per dimostrare che $P \implies Q$ si assume P vera e Q falsa e si dimostra che
>
> $$P \wedge \neg Q \implies R \wedge \neg R$$
>
> è vero (i.e $R \wedge \neg R$ è sempre falso, contraddizione) dove R è una qualunque proposizione

Nota: Assumere contemporaneamente vere l'ipotesi e la negazione della tesi porta ad una contraddizione

Dimostrazione per assurdo

Dimostrazione

L'implicazione $P \wedge \neg Q \implies R \wedge \neg R$ (con tesi falsa) è vera se l'ipotesi è falsa, ovvero $P \wedge \neg Q$ è falsa

Tabella di verità: $P \implies Q$

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dimostrazione per assurdo

Dimostrazione

L'implicazione $P \land \neg Q \implies R \land \neg R$ (con tesi falsa) è vera se l'ipotesi è falsa, ovvero $P \land \neg Q$ è falsa

Il valore di verità di $\neg(P \land \neg Q)$ è lo stesso di $\neg P \lor Q$ (De Morgan)

Quindi, $P \land \neg Q$ è falsa se $\neg P \lor Q$ è vera

Il valore di verità di $\neg P \lor Q$ è lo stesso di $P \implies Q$ (equivalenza dell'implicazione)

Da $\neg P \lor Q$ vera segue che $P \implies Q$ è vera

Esempio: irrazionalità di $\sqrt{2}$

> Non esiste alcun numero razionale $p = m/n$ (con m e n primi tra loro) il cui quadrato sia 2, i.e. $p^2 = 2$

Dimostrazione (per assurdo)

- Ipotesi: $P(m, n)$: m, n interi positivi, primi tra loro tali che $p^2 = 2$ $(p = m/n)$
- Tesi: $Q(m, n) = p = \frac{m}{n} \neq 2$, i.e. p non è razionale

Esempio: irrazionalità di $\sqrt{2}$

Per assurdo (versione 2) con

- P vera
- Q falsa

i.e.

- $P(m,n)$ vera (primi tra loro), e
- $Q(m,n)$ falsa i.e. $\neg Q(m,n)$ vera, cioè p è razionale

si arriva ad una contraddizione

Nel nostro caso sarà $R(m,n)$: “m, n primi tra loro”

Esempio: irrazionalità di $\sqrt{2}$

- $P(m, n)$ vera (primi tra loro), e
- $Q(m, n)$ falsa i.e. $\neg Q(m, n)$ vera, cioè p è razionale

Essendo $p = \frac{m}{n}$ razionale, elevandolo al quadrato si ha

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

ovvero $m^2 = 2n^2$

Per un qualunque n, m^2 è pari, e quindi anche m è pari (se m fosse dispari sarebbe della forma $m = 2h + 1$ e $m^2 = 4h^2 + 4h + 1$ sarebbe dispari)

Quindi posso scrivere $m = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, da cui $(2k)^2 = 2n^2$, i.e. $2k^2 = n^2$

Esempio: irrazionalità di $\sqrt{2}$

- $P(m, n)$ vera (primi tra loro), e
- $Q(m, n)$ falsa i.e. $\neg Q(m, n)$ vera, cioè p è razionale
- Per un qualunque n, m^2 è pari ($m = 2k$)

Allo stesso modo confrontando k con n in

$$2k^2 = n^2$$

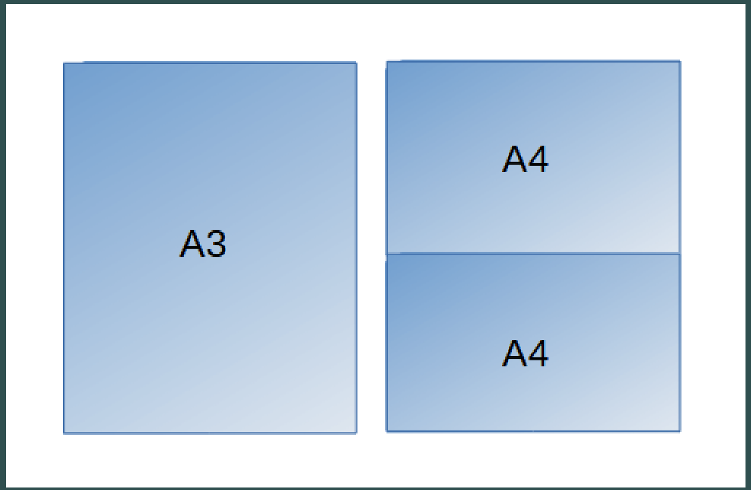
deduco che n è pari

Quindi ho dimostrato che m e n non sono primi tra loro ($\neg R$), arrivando ad un assurdo, e questo conclude la dimostrazione

Curiosità: il formato di carta ISO 216

- Il formato standard di carta **ISO 216** (A0, A1, A2, A3, A4, ecc.) ha la proprietà

$$\text{Lato corto} : \text{Lato lungo} = 1 : \sqrt{2}$$



- Questa rapporto permette di mantere la proporzione se tagliato a metà lungo il lato più lungo ($\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) perché

$$\frac{\text{Nuovo lato corto}}{\text{Nuovo lato lungo}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Curiosità: il formato di carta ISO 216

Dimostriamo che $\sqrt{2}$ è quella che garantisce questa suddivisione

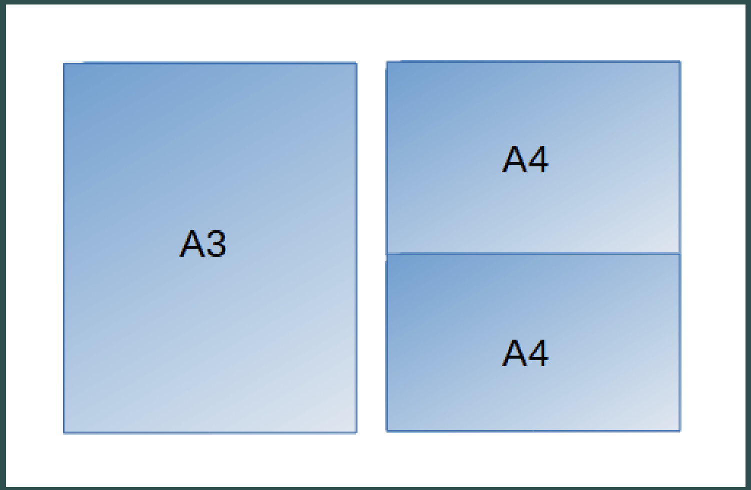
Da

$$\text{Nuovo lato corto} : \text{Nuova lato lungo} = \text{Lato corto} : \text{Lato lungo}$$

indichiamo con $x = \text{Lato lungo}$ e quindi sarà $\frac{x}{2} = \text{Nuovo lato corto}$

da cui

$$\frac{x}{2} : 1 = 1 : x \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt{2}$$




FINE