Proposizioni — parte II

(Ordine gerarchico / Tautologia)

Elementi di logica

Manolo Venturin

~~~ 2 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Logica: Ordine gerarchico
- Tautologia
- Prima e seconda legge di De Morgan
- Principio di contrapposizione

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Riassunto operatori logici

- Negazione: $\neg P$
- Congiunzione: $P \land Q$
- Disgiunzione: $P \lor Q$
- Implicazione: $P \implies Q$
- Doppia implicazione: $P \iff Q$

Ordine gerarchico

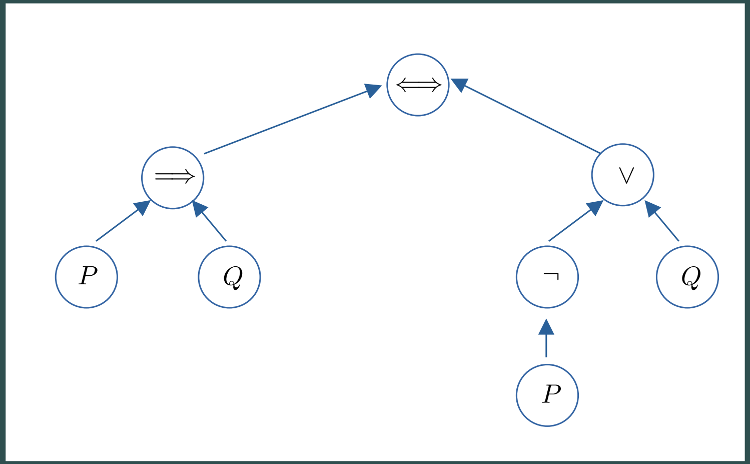
> **Definizione (dal più prioritario al meno prioritario)**
>
> $$\neg\,,\quad \wedge\,,\quad \vee\,,\quad \Longrightarrow\,,\quad \Longleftrightarrow$$

Aiuta la scrittura di espressioni logiche con poche parentesi (facili da leggere)

Esempio

- $P \vee (\neg P)$ diventa $P \vee \neg P$

- $(P \implies Q) \iff ((\neg P) \vee Q)$ diventa $P \implies Q \iff \neg P \vee Q$



Tautologia

> **Definizione**
> **Tautologia:** una proposizione i cui valori di verità sono tutti uguali a vero

Esempio 1

> Dimostrare che
>
> $$P \vee \neg P$$
>
> è una tautologia

Dimostrazione

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	F	V
F	V	V

Esempio 2
(prima legge di De Morgan)

> Dimostrare che
>
> $$\neg(P \lor Q) \iff \neg P \land \neg Q$$

Dimostrazione

P	Q	$P \lor Q$	$\neg(P \lor Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \land \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Esempio 3
(seconda legge di De Morgan)

> Dimostrare che
>
> $$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q$$

Dimostrazione

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Esempio 4 (principio di contrapposizione)

> Dimostrare che
>
> $$P \implies Q \iff \neg Q \implies \neg P$$

Dimostrazione

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \implies \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

Esempio 5

> Dire se l'espressione logica
>
> $$P \wedge \neg(Q \wedge R) \implies P \vee (Q \wedge R)$$
>
> è una tautologia

Soluzione

Cerchiamo di semplificare i casi prima di costruire al tabella di verità completa

Nell'espressione logica se P è falso allora si ha che l'ipotesi è falsa da cui segue che l'implicazione è vera (per ogni tesi)

Nel caso in cui P è VERO, l'espressione si riscrive come

$$\neg(Q \wedge R) \implies \mathrm{VERO} \quad \iff \quad (Q \wedge R) \vee \mathrm{VERO} \quad \iff \quad \mathrm{VERO}$$

Quindi è sempre vera

Esempio 5

> Dire se l'espressione logica
>
> $$P \wedge \neg(Q \wedge R) \implies P \vee (Q \wedge R)$$
>
> è una tautologia

Soluzione

- Se P è VERO allora per qualuque valore di R e P l'implicazione è vera
- Rimane fuore il calso P è FALSO (analogo)

Esempio 5

> Dire se l'espressione logica
>
> $$P \wedge \neg(Q \wedge R) \implies P \vee (Q \wedge R)$$
>
> è una tautologia

Tabella di verità

Variabile	valore…							
P	F	F	F	F	V	V	V	V
Q	F	F	V	V	F	F	V	V
R	F	V	F	V	F	V	F	V
Espressione	V	V	V	V	V	V	V	V

Quindi possiamo concludere che è una tautologia

Proprietà

- $P \implies Q \iff \neg P \lor Q$ (equivalenza implicazione)
- $\neg(P \lor Q) \iff \neg P \land \neg Q$ (prima legge di De Morgan)
- $\neg(P \land Q) \iff \neg P \lor \neg Q$ (seconda legge di De Morgan)
- $P \lor (Q \land R) \iff (P \lor Q) \land (P \lor R)$ (distributiva della disgiunzione sulla congiunzione)
- $P \land (Q \lor R) \iff (P \land Q) \lor (P \land R)$ (distributiva della congiunzione sulla disgiunzione)

Curiosità

La funzione logica **NAND** (“not and”) con la tavola di verità

P	Q	$P \wedge Q$	NAND
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

permette di scrivere ogni connettivo logico.

Ad esempio, il $\mathrm{NOT}(x)$ è $\mathrm{NAND}(x, x)$

Nell’ambito dell’elettronica ogni funzione logica è possibile costruirla attraverso delle porte NAND avendo così da gestire solo un tipo di tecnologia costruttiva


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)