Proposizioni — parte I

(Definizione di proposizione / Connettivi logici)

Elementi di logica

Manolo Venturin

~~~ 2 ~~~
~~~

Obiettivo (corso Analisi Matematica 1)

- Logica: Definizione di proposizione
- Connettivi logici
  - Negazione
  - Congiunzione
  - Disgiunzione
  - Implicazione
  - Doppia implicazione

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Definizione di proposizione (predicato / enunciato / principio / affermazione / assioma)

Logica: Formalismo del linguaggio matematico

Proposizione: elemento base del quale è possibile attribuire inequivocabilmente (in modo oggettivo) un **valore di verità** (vero o falso)

I sinonimi di proposizione quali enunciato, predicato, principio, affermazione, assioma, sono usati in contesti ben particolari

Esempio

- “$3 > 10$”: è una proposizione falsa
- “$\text{2 è un numero pari}$”: è una proposizione vera
- “$\text{Venezia è una bella città}$”: non è una proposizione in quanto non possiamo dire se è vera o falsa (è qualcosa di soggettivo; non è un’affermazione oggettiva)

Connettivi logici

I connettivi logici premettono di costruire nuove proposizioni a partire da altre proposizioni e sono:

- Negazione
- Congiunzione
- Disgiunzione
- Implicazione
- Doppia implicazione

Negazione: $\neg P$

> **Definizione**
> $\neg P$ corrisponde a **“non P”** del linguaggio naturale

Tabella di verità

Se P è vero, allora il suo negato è falso

P	$\neg P$
V	F
F	V

Esempio

Se P è "$2 \text{ è un numero pari}$" è una proposizione vera, allora

- $\neg P$, i.e. $2 \text{ non è un numero pari}$, è una proposizione falsa
- $\neg(\neg P)$ è la preposizione di partenza P

Congiunzione: $P \wedge Q$

Definizione

$P \wedge Q$ corrisponde a **“P e Q”** del linguaggio naturale

Tabella di verità

L’affermazione $P \wedge Q$ è vera quando P e Q sono entrambe vere

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempio

- P: “2 è un numero pari” (vera)
- Q: “3 è un numero dispari” (vera)
- $P \land Q$: “2 è un numero pari” e “3 è un numero dispari” (vera)

Disgiunzione: $P \vee Q$

Definizione

$P \vee Q$ corrisponde a **“P o Q”** del linguaggio naturale (nel senso di almeno una)

Tabella di verità

L’affermazione $P \vee Q$ è falsa quando P e Q sono entrambe false (vera quando almeno una è vera)

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio

- P: “2 è un numero pari” (vera)
- Q: “3 è un numero pari” (falsa)
- $P \vee Q$: “2 è un numero pari” o “3 è un numero pari” (vera)

Implicazione: $P \implies Q$

> **Definizione**
> $P \implies Q$ corrisponde a **"P implica Q"** o **"se P, allora Q"** del linguaggio naturale

Tabella di verità

L'affermazione $P \implies Q$ è vera se P e Q sono entrambe vere o se P (ipotesi) è falsa

(da ipotesi false si può dedurre qualunque conseguenza)

- P è detta ipotesi
- Q è detta tesi

Implicazione: $P \implies Q$

Tabella di verità

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Nota

- Nessun rapporto tra i predicati (rapporto di causa-effetto del linguaggio naturale)
- Un teorema afferma che $P \implies Q$ è vera (per dimostrazione) e partendo dalla verità di P (ipotesi) si arriva alla verità di Q (tesi)
- $P \implies Q$ non è equivalente a $Q \implies P$

Esempio 1

- P: “Piove” (vera)
- Q: “Raul sta a casa” (vera)
- $P \implies Q$: se “piove” allora “Raul sta a casa” (vera)

Esempio 2

L'implicazione $P \implies Q$ ha la stessa tavola di verità di $(\neg P) \vee Q$, infatti

P	Q	$P \implies Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Condizione necessaria e sufficiente

Dalla frase

$$\text{Venezia è una città veneta allora Venezia è italiana}$$

si ha

- $P = \text{Venezia è una città veneta}$
- $Q = \text{Venezia è italiana}$

Allora:

- per essere veneta è condizione **necessaria** essere italiana
- se non è italiana, sicuramente non può essere veneta

Condizione necessaria e sufficiente

Da $P \implies Q$ (ipotesi implica tesi)

- Q è detta **condizione necessaria** per P
  - deve essere soddisfatta affinché la premessa sia vera
  - se non vale, la proprietà non può valere

Condizione necessaria e sufficiente

Dalla frase

$$\text{Venezia è una città veneta allora Venezia è italiana}$$

si ha

- $P = \text{Venezia è una città veneta}$
- $Q = \text{Venezia è italiana}$

Allora:

- il fatto di essere una città veneta è **sufficiente** per essere italiana
- se non è veneta, non si può dire nulla sul fatto che di essere italiana o meno

Condizione necessaria e sufficiente

Da $P \implies Q$ (ipotesi implica tesi)

- P è detta **condizione sufficiente** per Q
  - se soddisfatta garantisce la verità della proposizione
  - se non è soddisfatta, la proprietà potrebbe comunque valere

Doppia implicazione: $P \iff Q$

Definizione

$P \iff Q$ corrisponde a **“P se e solo se Q”** del linguaggio naturale

Nota $P \iff Q$ è equivalente a $(P \implies Q) \land (Q \implies P)$

Si dice che P è **condizione necessaria e sufficiente** per Q

(Uno implica l’altra, e viceversa)

Doppia implicazione: $P \iff Q$

Tabella di verità

L'affermazione $P \iff Q$ è vera quando P e Q sono entrambe vere o entrambe false

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Curiosità

- Il fondatore della logica matematica è stato **George Boole** (1815-1864)
- Successivamente fu **Augustus De Morgan** (1806-1871) continuare nello sviluppo dell'algebra booleana
- Il termine "boolean" viene utilizzatto in informatica per indicare una variabile che può assumere un valore "vero" o "falso"


FINE