Funzioni integrali
Esercizi #3

(Funzioni integrali) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 23 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Indice degli esercizi

Studiare le seguenti funzioni integrali:

1. $F(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$
   - dire inoltre, al variare di α, quante soluzione ha l'equazione $F(x) = \alpha x$
2. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}}\,dt$
3. $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan\left(2 + \cos t\right) dt$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Soluzione

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 1

> Studiare la seguente funzione integrale (error function)
>
> $$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$
>
> Dire inoltre, al variare di α, quante soluzione ha l'equazione $F(x) = \alpha x$

Soluzione

Di questa funzione eseguiremo lo studio:

1. del dominio
2. del comportamento all'infinito
3. della derivata prima
4. della derivata seconda
5. ed eseguiremo una bozza del grafico

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 1

Soluzione

La funzione integranda $f(t) = e^{-t^2}$ è continua e integrabile in senso improprio su tutto $\mathbb{R}$

La derivata prima di

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

è

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Si ha che

$$F'(x) > 0 \quad \forall x$$

Essendo strettamente crescente non ci sono mai massimi o minimi

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 1

Essendo $F(0) = 0$ e $F'(x) > 0$ segue che

- $F(x)$ è positiva per $x > 0$
- $F(x)$ è negativa per $x < 0$

Proviamo che $F(x)$ è dispari, infatti

$$
\begin{aligned}
F(-x) = & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} e^{-t^2}\, dt \\
= & \ (u = -t,\ du = -dt\,) \ = \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-u^2} \cdot (-1)\, du \\
= & -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} e^{-u^2}\, du \ = \ -F(x)
\end{aligned}
$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 1

Essendo dispari ci basta studiare solo il comportamento per $x > 0$

Si ha (essendo integrabile in senso improprio)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \;=\; \ell > 0 \quad (\text{finito})$$

Si potrebbe dimostrare che, dall'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, si ha

$$\ell = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \;=\; 1$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 1

La derivata seconda di

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad , \quad F'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2}$$

è

$$F''(x) \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

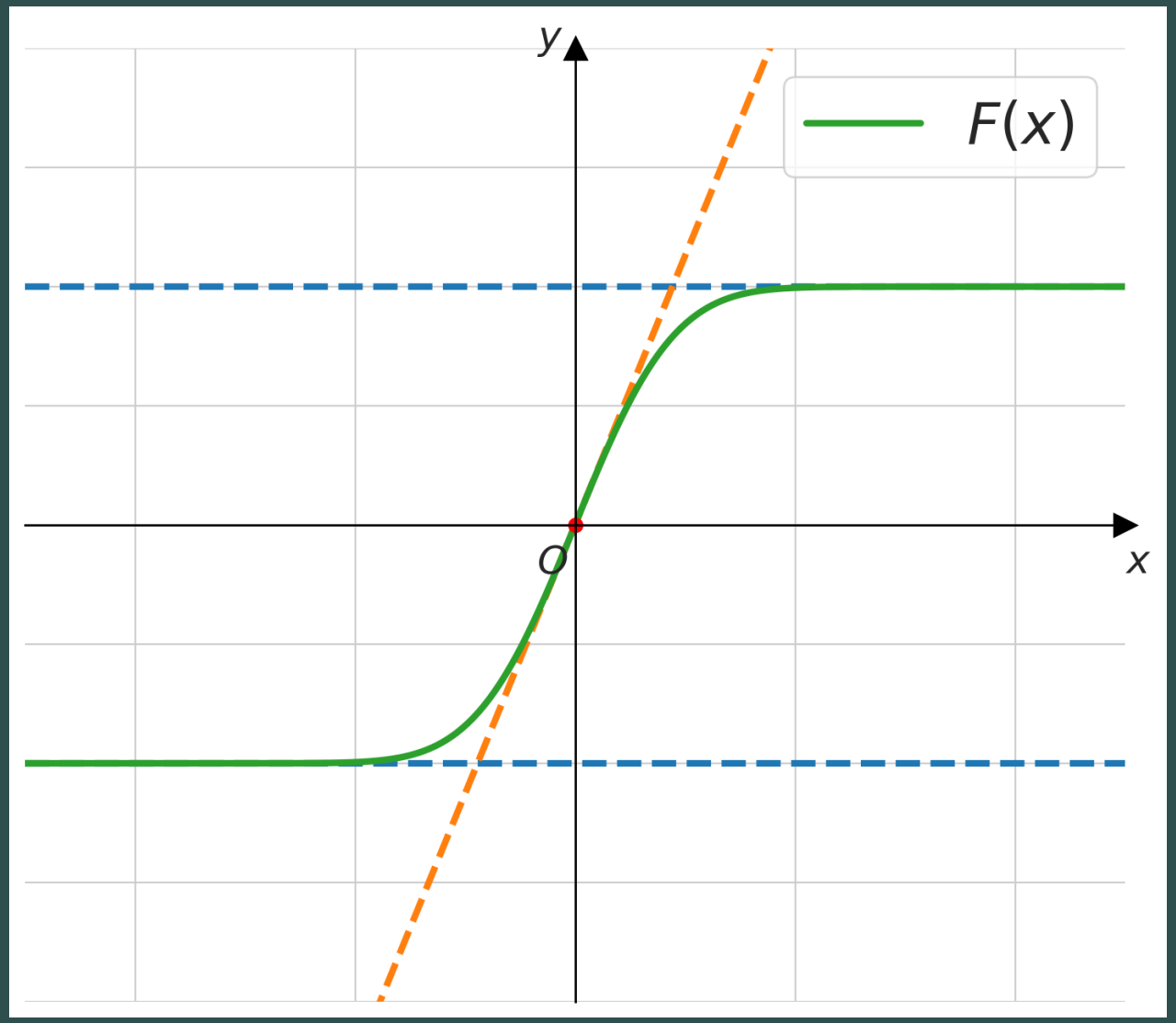
Si ha

- $F''(x) = 0$ per $x = 0$
- $F''(x) < 0$ per $x > 0$

- $x = 0$ è un punto di flesso

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 1

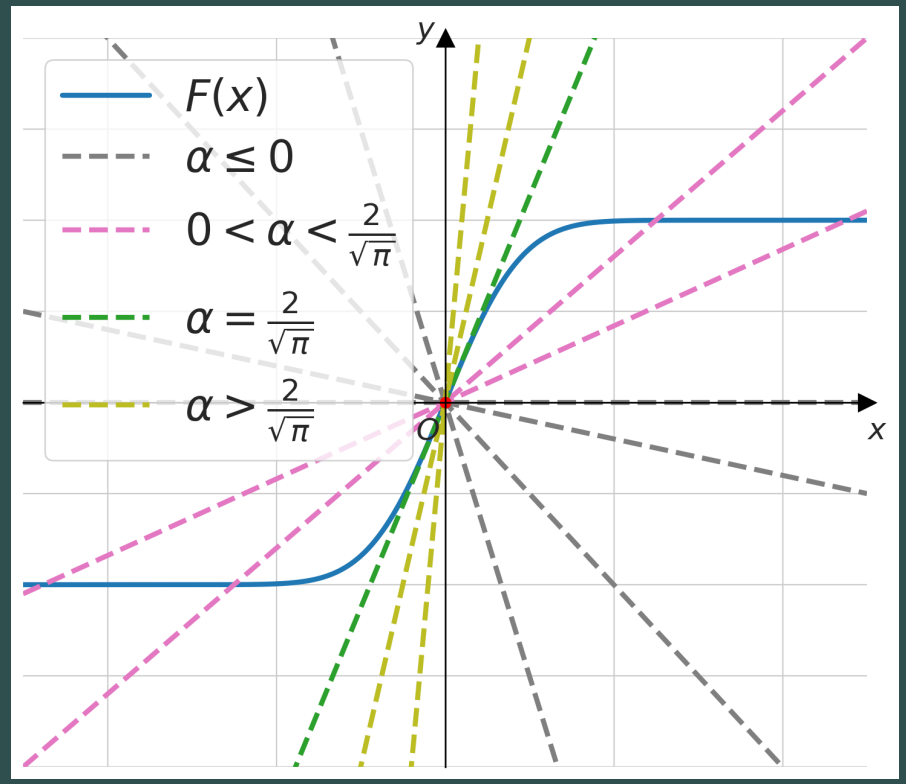


Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 1

Dal momento che la $F'(x) > 0$ e $F'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, allora $F(x) = \alpha x$ si ha che

- se $\alpha \leqslant 0$: 1 intersezione
- se $0 < \alpha < \frac{2}{\sqrt{\pi}}$: 3 intersezioni
- se $\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$: 1 intersezione
- se $\alpha > \frac{2}{\sqrt{\pi}}$: 1 intersezione



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 2

> Studiare la seguente funzione integrale (integrale ellittico)
>
> $$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}}\, dt$$

Di questa funzione eseguiremo lo studio:

1. del dominio
2. del comportamento all'infinito
3. della derivata prima
4. della derivata seconda
5. ed eseguiremo una bozza del grafico

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 2

Soluzione

Dal fatto che

$$-1 \leqslant \sin t \leqslant 1 \iff 0 \leqslant \sin^2 t \leqslant 1 \iff 0 \leqslant \frac{\sin^2 t}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

si ha

- la funzione integranda non ha problemi di dominio
- è sempre positiva

e inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}} \in [1,\ \sqrt{2}]$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 2

La derivata prima di

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}}\, dt$$

è

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 x}{2}}}$$

Si ha (dalle premessa precedente) che

$$F'(x) > 0 \quad \forall x$$

Essendo strettamente crescente non ci sono mai massimi o minimi

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 2

Essendo $F(0) = 0$ e $F'(x) > 0$ segue che

- $F(x)$ è positiva per $x > 0$
- $F(x)$ è negativa per $x < 0$

Proviamo che $F(x)$ è dispari, infatti

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}}\, dt$$

$$= (u = -t,\ du = -dt) = \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(-u)}{2}}} \cdot (-1)\, du$$

$$= -\int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 u}{2}}}\, du = -F(x)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 2

Essendo dispari ci basta studiare solo il comportamento per $x > 0$

Dal momento che

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}} \in [1,\ \sqrt{2}]$$

si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}}\, dt \ \geqslant \ \lim_{x \to +\infty} \int_0^x 1\, dt \ = \ \lim_{x \to +\infty} x \ = \ +\infty$$

Si potrebbe dimostrare che

$$\int_0^x 1\, dt \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x \sqrt{2}\, dt \ = \ x \leqslant F(x) \leqslant \sqrt{2}x$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 2

La derivata seconda di

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 t}{2}}}\, dt \quad , \quad F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 x}{2}}}$$

è

$$F''(x) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin^2 x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{-2 \sin x \cos x}{2} = \frac{\sin x \cos x}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 x}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

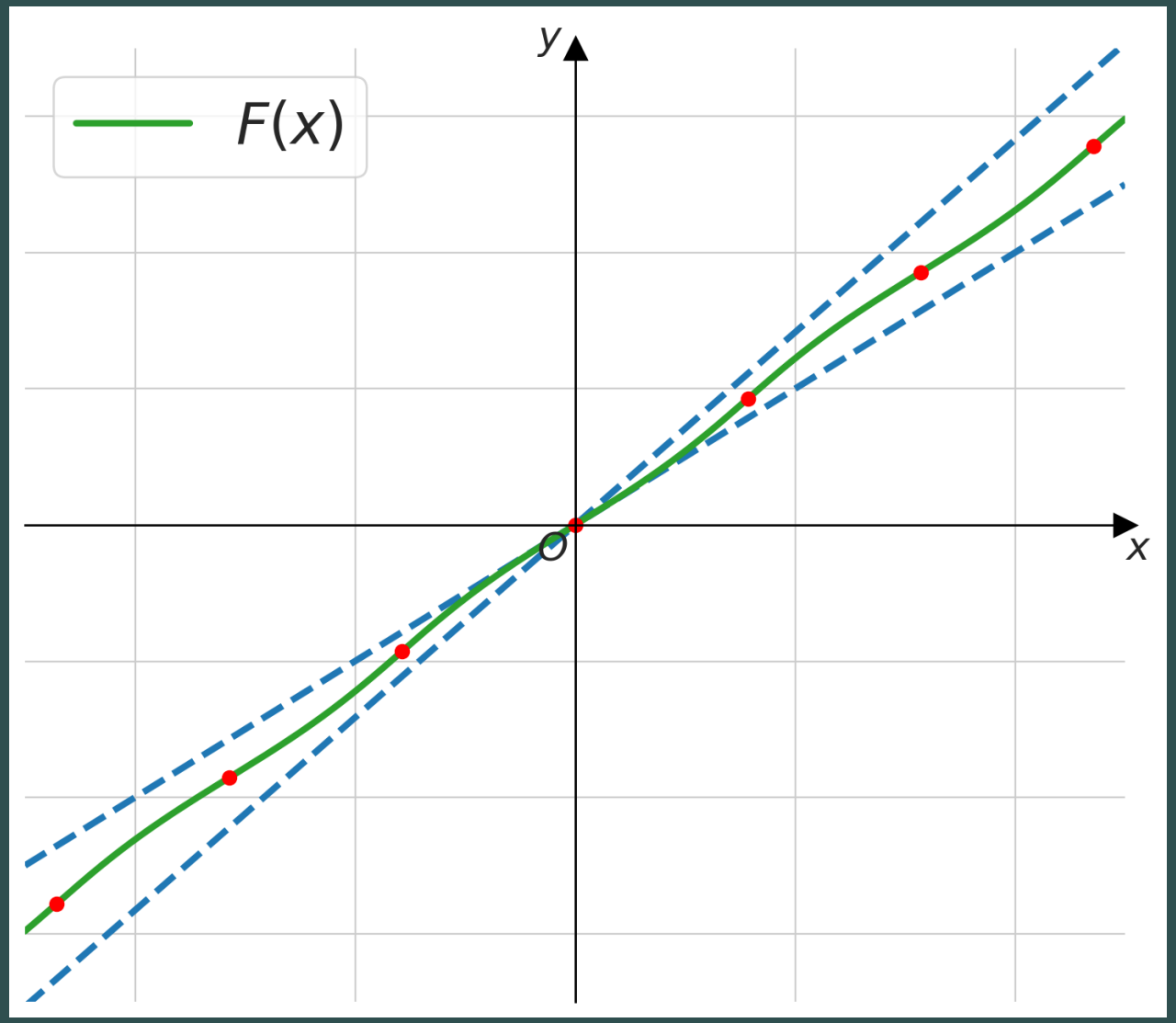
Si ha

- gli zeri di $F''(x)$ si ottengono risolvendo $\sin x \cos x = 0$ i.e. $x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$
- $F''(x) > 0$ per $\sin x \cos x > 0$ i.e.

$$\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 2



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 3

> Studiare la seguente funzione integrale
>
> $$F(x) = \int_0^x \arctan\left(2 + \cos t\right) dt$$

Di questa funzione eseguiremo lo studio:

1. del dominio
2. del comportamento all'infinito
3. della derivata prima
4. della derivata seconda
5. ed eseguiremo una bozza del grafico

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 3

Soluzione

La funzione integranda non ha problemi di dominio

La derivata prima di

$$F(x) = \int_0^x \arctan\left(2 + \cos t\right) dt \quad \text{è} \quad F'(x) = \arctan\left(2 + \cos x\right)$$

Ora, dal fatto che $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \iff 2 + \cos t \geqslant 1$ si ha

$$\arctan\left(2 + \cos t\right) \geqslant \arctan 1 > 0$$

e quindi

$$F'(x) > 0 \quad \forall x$$

Essendo strettamente crescente non ci sono mai massimi o minimi

Inoltre $F(0) = 0$ e quindi $F(x) > 0$ per $x > 0$ e $F(x) < 0$ per $x < 0$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 3

La derivata seconda di

$$F(x) = \int_0^x \arctan\left(2 + \cos t\right) dt \quad , \quad F'(x) = \arctan\left(2 + \cos x\right)$$

è

$$F''(x) = \frac{1}{1 + \left(2 + \cos x\right)^2} \cdot \left(-\sin(x)\right)$$

Si ha

- $F''(x) = 0$ per $\sin x = 0 \iff x = k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$
- $F''(x) > 0$ per $-\sin x > 0 \iff x = (-\pi < x < 0) + k\pi$
- $F''(x) < 0$ per $-\sin x < 0 \iff x = (0 < x < \pi) + k\pi$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 3

Essendo $\arctan$ una funzione strettamente crescene si ha

$$1 \leqslant 2 + \cos t \leqslant 3 \iff \frac{\pi}{4} \leqslant \arctan(2 + \cos t) \leqslant \arctan 3$$

e quindi per $x > 0$

$$\frac{\pi}{4} \cdot x \leqslant F(x) \leqslant \arctan(3) \cdot x$$

da cui

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 3

Con analogo discorso di dimostra che

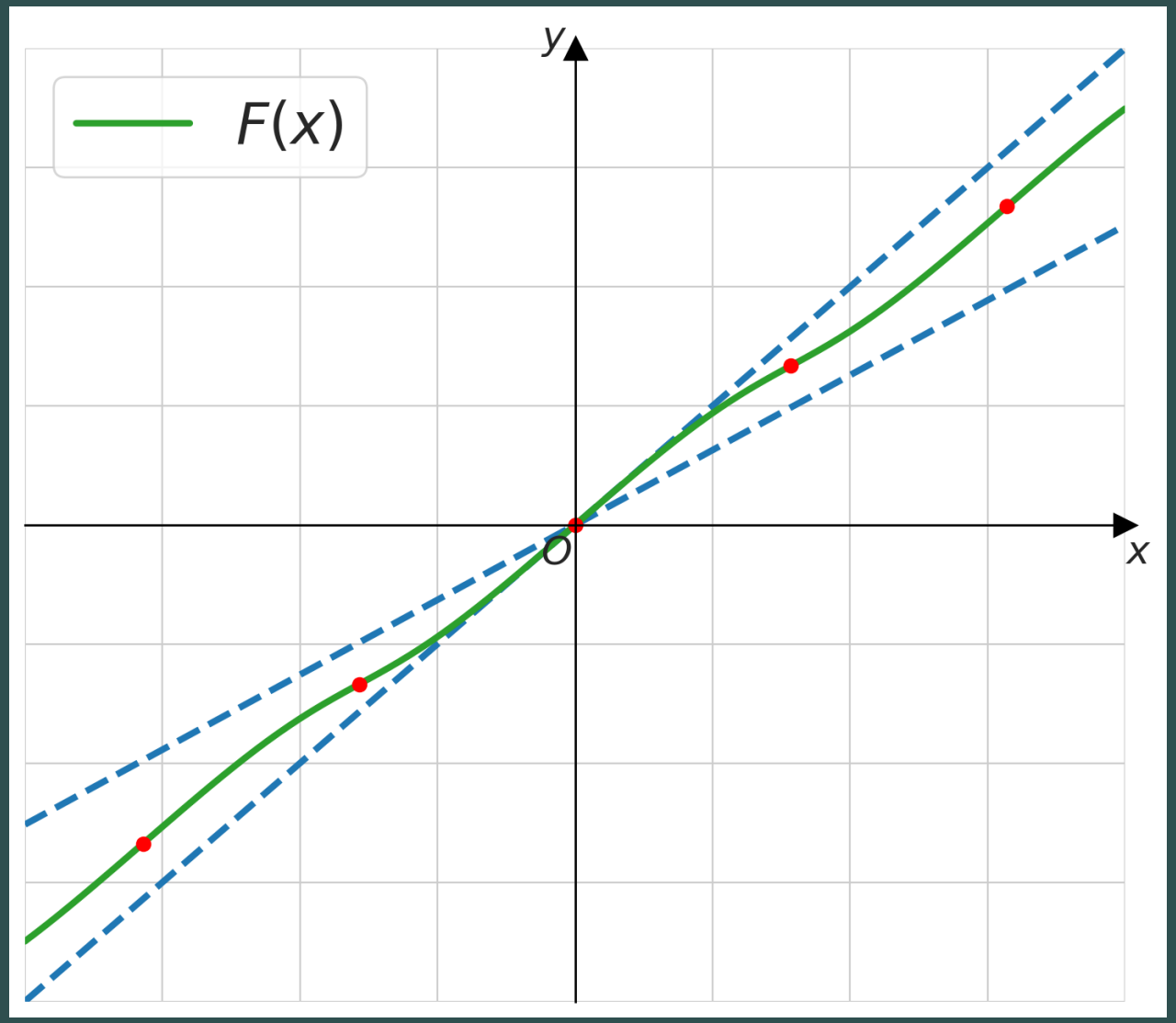
$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty$$

Si potrebbe dimostrare che $F(x)$ è dispari, i.e.

$$\begin{aligned} F(-x) = \; F(x) &= \int_0^{-x} \arctan\left(2 + \cos t\right) dt \\ &= \; (\, u = -t,\; du = -dt\,) \; = \; \int_0^{x} \arctan\left(2 + \cos\left(-u\right)\right) \cdot (-1)\, du \\ &= \; -\int_0^{x} \arctan\left(2 + \cos u\right) du \; = \; -F(x) \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esercizio 3



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)