Funzioni integrali
Esercizi #2

(Funzioni integrali) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 23 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

Per le seguenti funzioni integrali

1. $F(x) = \int_{-\pi}^{x} \frac{e^{\sqrt{\pi - t}}}{\cos t - \pi}\, dt$ e $y_0 = 0$

2. $F(x) = 1 + \int_{1}^{x} \frac{e^{t}}{1 + t^2}\, dt$ e $y_0 = 1$

3. $F(x) = 1 + \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{x} \left(3 - \sin^2\left(t^2\right)\right)\, dt$ e $y_0 = 1$

4. $F(x) = (x+1) \int_{x}^{0} \sqrt{t+1} \cos t\, dt$

1. trovare l'insieme di definizione
2. calcolare la derivata prima $F'(x)$ e la derivata seconda $F''(x)$
3. dimostrare che F è invertibile (tranne il n.4)
4. detta G l'inversa trovare $G'(y_0)$ e $G''(y_0)$ (tranne il n.4)

Soluzione

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esercizio 1

Data la funzione

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} \frac{e^{\sqrt{\pi - t}}}{\cos t - \pi}\, dt$$

1. trovare l’insieme di definizione
2. dimostrare che F è invertibile
3. detta G l’inversa trovare $G'(0)$ e $G''(0)$

Esercizio 1

Soluzione 1 (insieme di definizione)

La funzione integranda $\frac{e^{\sqrt{\pi-t}}}{\cos t-\pi}$ è definita per $\pi - t \geqslant 0 \iff t \leqslant \pi$

Per $t \leqslant \pi$ è anche continua (il denominatore non si annulla mai)

Pertando, l'insieme di definizione di F è

$$\mathcal{D} = (-\infty,\ \pi)$$

Soluzione 2 (derivata prima e invertibilità)

La derivata prima è

$$F'(x) = \left(\int_{-\pi}^{x} \frac{e^{\sqrt{\pi-t}}}{\cos t - \pi}\, dt\right)' = \frac{e^{\sqrt{\pi-x}}}{\cos x - \pi}$$

Essendo $F'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$ allora la funzione è strettamente decrescente e quindi invertibile

Esercizio 1

Soluzione 3 (derivata seconda e calcolo inversa in un punto)

Essendo $F(-\pi) = 0$ si ha

$$G'(0) = \frac{1}{F'(-\pi)} = \frac{1}{\frac{e^{\sqrt{\pi+\pi}}}{\cos(-\pi)-\pi}} = -\frac{1+\pi}{e^{\sqrt{2\pi}}}$$

La derivata seconda di F è

$$F''(x) = \frac{e^{\sqrt{\pi-x}}\,(2\sqrt{\pi-x}\sin x - \cos x + \pi)}{2\sqrt{\pi-x}(\cos x - \pi)^2}$$

Esercizio 1

Dalla formula

$$G'(y) = \frac{1}{F'(x)} \quad \Longrightarrow \quad G'(y) = \frac{1}{F'(G(y))} = [F'(G(y))]^{-1}$$

si ha (derivata delle funzioni composte)

$$\begin{aligned} G''(y) &= -[F'(G(y))]^{-2} \cdot F''(G(y)) \cdot G'(y) \\ &= -[F'(G(y))]^{-2} \cdot F''(G(y)) \cdot \frac{1}{F'(G(y))} \\ &= -\frac{F''(G(y))}{[F'(G(y))]^{3}} \end{aligned}$$

Esercizio 1

$$F'(x) = \frac{e^{\sqrt{\pi - x}}}{\cos x - \pi}$$

$$F''(x) = \frac{e^{\sqrt{\pi - x}}\,(2\sqrt{\pi - x}\sin x - \cos x + \pi)}{2\sqrt{\pi - x}(\cos x - \pi)^2}$$

Quindi

$$G''(0) = -\frac{F''(-\pi)}{[F'(-\pi)]^3} = -\frac{\frac{e^{\sqrt{2\pi}}}{2(1+\pi)\sqrt{2\pi}}}{\left[-\frac{e^{\sqrt{2\pi}}}{1+\pi}\right]^3} = \frac{(1+\pi)^2}{2\sqrt{2\pi}e^{2\sqrt{2\pi}}}$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$F(x) = 1 + \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$$

1. trovare l'insieme di definizione
2. dimostrare che F è invertibile
3. detta G l'inversa trovare $G'(1)$ e $G''(1)$

Esercizio 2

Soluzione 1 (insieme di definizione)

La funzione integranda $\frac{e^t}{1+t^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e quindi l'integrale esiste finito

Pertando, l'insieme di definizione di F è

$$\mathcal{D} = (-\infty,\ +\infty)$$

Soluzione 2 (derivata prima e invertibilità)

La derivata prima è

$$F'(x) \ = \ \left(1 + \int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt\right)' \ = \ \frac{e^x}{1+x^2}$$

Essendo $F'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}$ allora la funzione è strettamente crescente e quindi invertibile

Esercizio 2

Soluzione 3 (derivata seconda e calcolo inversa in un punto)

Essendo $F(1) = 1$ si ha

$$G'(1) \;=\; \frac{1}{F'(1)} \;=\; \frac{1}{\frac{e^1}{1+1^2}} \;=\; \frac{2}{e}$$

La derivata seconda di F è

$$F''(x) \;=\; \left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)' \;=\; \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$$

e quindi (si veda l'esercizio 1)

$$G''(1) \;=\; -\left.\frac{F''(x)}{[F'(x)]^3}\right|_{x=1} \;=\; 0$$

Esercizio 3

Data la funzione

$$F(x) = 1 + \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{x} \left(3 - \sin^2\left(t^2\right)\right)\, dt$$

1. trovare l'insieme di definizione

2. dimostrare che F è invertibile

3. detta G l'inversa trovare $G'(1)$ e $G''(1)$

Esercizio 3

Soluzione 1 (insieme di definizione)

La funzione integranda $f(t) = \left(3 - \sin^2\left(t^2\right)\right)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ e quindi l'integrale $\int_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{x} f(t)\,dt$ esiste finito per ogni $x \in \mathbb{R}$

Pertando, l'insieme di definizione di F è

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}$$

Soluzione 2 (derivata prima e invertibilità)

La funzione integrale è la somma di due funzioni derivabili

La derivata prima è

$$F'(x) \ = \ 3 - \sin^2\left(x^2\right)$$

Essendo $F'(x) > 0$ (poiché $\sin^2\left(x^2\right) \leqslant 1$) per ogni $x \in \mathcal{D}$ allora la funzione è strettamente crescente e quindi invertibile

Esercizio 3

Soluzione 3 (derivata seconda e calcolo inversa in un punto)

Essendo $F\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = 1$ si ha

$$G'(1) = \frac{1}{F'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} = \frac{1}{3 - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{5}$$

La derivata seconda di F è

$$F''(x) = \left(3 - \sin^2\left(x^2\right)\right)' = -2x\sin\left(2x^2\right)$$

e quindi (si veda l'esercizio 1)

$$G''(1) = -\left.\frac{F''(x)}{\left[F'(x)\right]^3}\right|_{x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = -\frac{-\sqrt{\pi}}{\left[\frac{5}{2}\right]^3} = \frac{8\sqrt{\pi}}{125}$$

Esercizio 4

Data la funzione

$$F(x) = (x+1)\int_x^0 \sqrt{t+1}\cos t\,dt$$

1. trovare l'insieme di definizione

2. calcolare la derivata prima $F'(x)$

3. calcolare la derivata prima $F''(x)$

Esercizio 4

Soluzione 1 (insieme di definizione)

La funzione integranda $f(t) = \sqrt{t+1}\cos t$ è definita per $t + 1 \geqslant 0$ i.e. $t \geqslant -1$ e ivi continua

Pertando, l'insieme di definizione di F è

$$\mathcal{D} = [-1,\ +\infty)$$

Soluzione 2 (derivata prima)

La derivata prima è (derivata del prodotto)

$$F'(x) \ = \ \left((x+1)\int_x^0 \sqrt{t+1}\cos t\, dt\right)' \ = \ -(x+1)^{\frac{3}{2}}\cos x + \int_x^0 \sqrt{t+1}\cos t\, dt$$

Esercizio 4

Soluzione 3 (derivata seconda)

La derivata seconda è (derivata del prodotto)

$$
\begin{aligned}
F''(x) &= \left(-(x+1)^{\frac{3}{2}}\cos x + \int_x^0 \sqrt{t+1}\cos t\,dt\right)' \\
&= -\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\cos x + (x+1)^{\frac{3}{2}}\sin x - \sqrt{x+1}\cos x \\
&= -\frac{3}{2}\sqrt{x+1}\cos x + (x+1)^{\frac{3}{2}}\sin x - \sqrt{x+1}\cos x \\
&= -\frac{5}{2}\sqrt{x+1}\cos x + (x+1)^{\frac{3}{2}}\sin x
\end{aligned}
$$


FINE