Funzioni integrali
Esercizi #1

(Funzioni integrali) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 23 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

Esercizi preliminari allo studio delle funzioni integrande

- derivate
- ordine di infinitesimo
- continuità
- dominio e invertibilità

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Esercizi

Esercizio 1

> Data la funzione $f(t) = \sin^2(t)$ calcolare:
>
> 1. la derivata di $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$
> 2. la derivata di $\displaystyle\int_x^0 f(t)\,dt$
> 3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\int_0^x f(t)\,dt$

Soluzione 1

$$\left(\int_0^x \sin^2(t)\,dt\right)' = \sin^2(x)\cdot 1 = \sin^2(x)$$

Esercizio 1

Soluzione 2

$$\left(\int_x^0 \sin^2(t)\,dt\right)' \;=\; -\sin^2(x)\cdot 1 \;=\; -\sin^2(x)$$

Soluzione 3

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \sin^2(t)\,dt \;\overset{(H)}{=}\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{3x^2} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} \;=\; \frac{1}{3}$$

Esercizio 2

> Data la funzione integrale
>
> $$F(x) = \int_0^x \frac{\log(1-t)}{1+t^2}\,dt$$
>
> determinare l'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$

Soluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \frac{\log(1-t)}{1+t^2}\,dt}{x^n} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(1-x)}{1+x^2}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x^2} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1-x)}{nx^{n-1}} = 1 \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{nx^{n-1}}$$

che risulta finito e diverso da zero per $n-1=1$ i.e. $n=2$ e vale $-\frac{1}{2}$ (parte principale)

Esercizio 3

> Data la funzione
>
> $$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{se } x < 1 \\ \int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$
>
> determinare $a,\ b,\ c$ tali che $F(x)$ sia di classe $\mathcal{C}^2$

Soluzione

I singoli tratti della funzione $F(x)$ sono di classe $\mathcal{C}^\infty$

Quindi dobbiamo imporre le condizioni di continuità da destra e da sinistra nel punto di giunzione $x = 1$

Nota: Ci sono due strategie risolutive

1. imponendo la continuità della funzione e delle sue derivate;
2. sfruttando lo sviluppo in serie di Taylor

Esercizio 3

Soluzione 1

Equazione per la continuità

Si deve avere

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) = \lim_{x\to 1^+} F(x)$$

cioè

$$a+b+c = \int_1^1 \frac{e^t}{t}\,dt = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a+b+c=0$$

Esercizio 3

Equazione per la continuità della derivata prima

Da

$$F'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{se } x < 1 \\ \frac{e^x}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

si deve avere

$$\lim_{x \to 1^-} F'(x) = \lim_{x \to 1^+} F'(x)$$

cioè

$$2a + b = \frac{e^1}{1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a + b = e$$

Esercizio 3

Equazione per la continuità della derivata seconda

Da

$$F''(x) = \begin{cases} 2a & \text{se } x < 1 \\ e^x \frac{x-1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

si deve avere

$$\lim_{x \to 1^-} F''(x) = \lim_{x \to 1^+} F''(x)$$

cioè

$$2a = e^1 \frac{1-1}{1^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a = 0$$

Esercizio 3

Per garantire la continuità $\mathcal{C}^2$ bisogna risolvere le seguenti equazioni

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b=e \\ 2a=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=0 \\ b=e \\ c=-e \end{cases}$$

per cui

$$F(x)=\begin{cases} ex-e & \text{se } x<1 \\ \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt & \text{se } x\geqslant 1 \end{cases}$$

Esercizio 3

Soluzione 2

Indicato con $G(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$ per $x \to 1^+$ si ha

$$G(x) = G(1) + G'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}G''(1)(x-1)^2 + O((x-1)^3)$$

per cui

- $G(1) = 0$
- $G'(1) = \left.\frac{e^x}{x}\right|_{x=1} = e$
- $G''(1) = \left. e^x\,\frac{x-1}{x^2}\right|_{x=1} = 0$

e quindi il polinomio cercato è

$$P(x) = 0 + e(x-1) + \frac{1}{2}\cdot 0(x-1)^2 \;=\; e(x-1)$$

Esercizio 4

Data la funzione

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin t - \pi}{t^3}\, dt$$

1. trovare il dominio $\mathcal{D}$
2. dimostrare che è invertibile in $\mathcal{D}$
3. sia G l'invesa di F, calcolare $G'(0)$

Esercizio 4

Soluzione 1

La funzione integranda è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Per $t \to 0$ si ha

$$\frac{\sin t - \pi}{t^3} \sim -\frac{\pi}{t^3} \to \infty$$

con ordine $\alpha = 3 \geqslant 1$ per cui l'integrale non converge (in senso improprio)

Quindi l'integrale esiste in $(0, +\infty)$ (l'estremo inferiore di integrazione è $\pi \in (0, +\infty)$)

Esercizio 4

Soluzione 2

Da

$$F(x) = \int_{\pi}^{x} \frac{\sin t - \pi}{t^3}\, dt$$

si ha

$$F'(x) = \frac{\sin x - \pi}{x^3}$$

Per $x > 0$ e ricordando che $|\sin x| \leqslant 1$ si ha

$$F'(x) < 0$$

Quindi essendo strettamente decrescente è anche invertibile

Esercizio 4

Soluzione 3

Sia G l'inversa di F. Il teorema della derivata dell'inversa afferma che

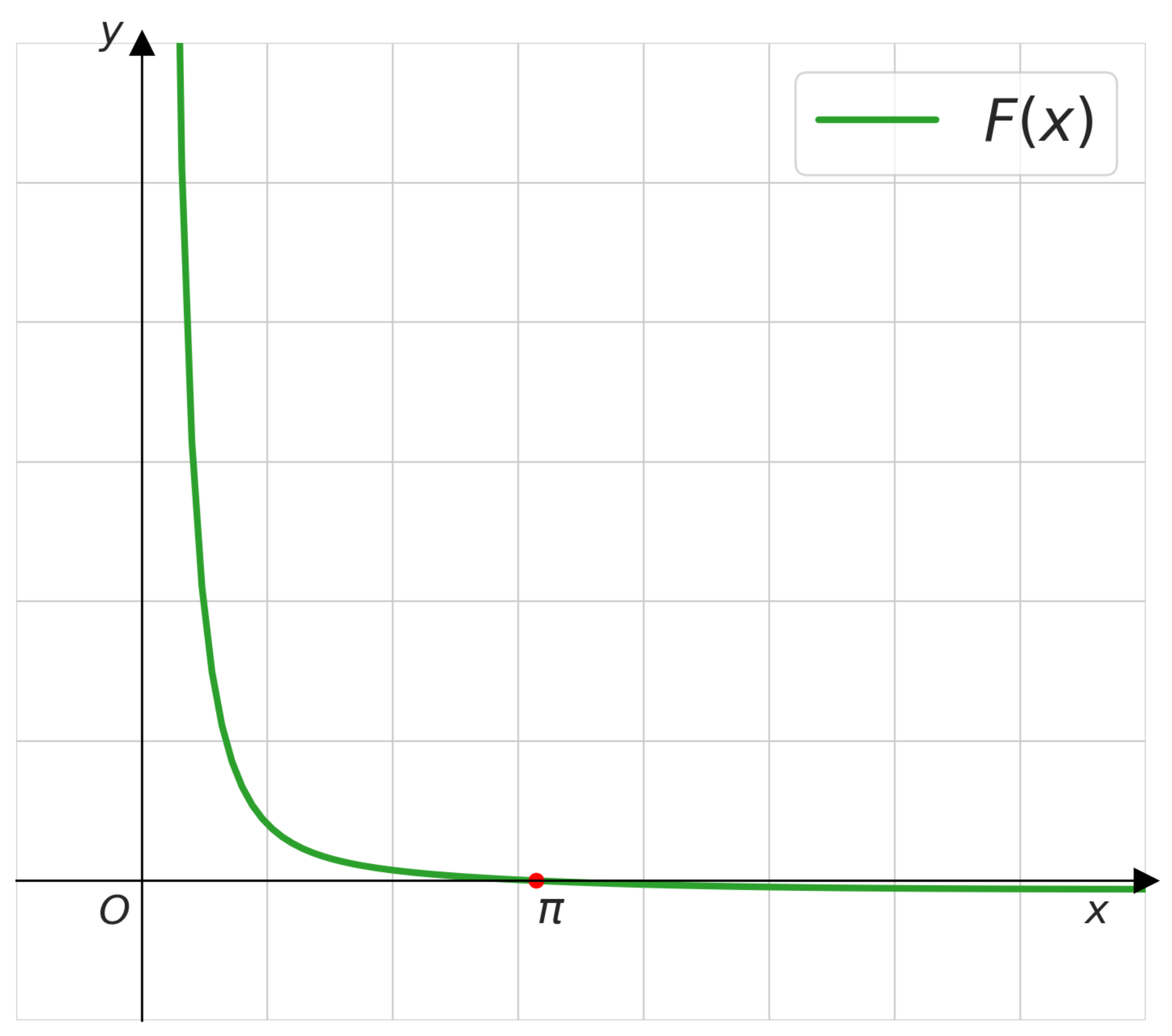
$$G'(y_0) = \frac{1}{F'(x_0)}$$

dove $y_0 = F(x_0)$ (se $F'(x_0) \neq 0$)

Da $F(\pi) = 0$ per il teorema della derivata della funzione inversa si ha

$$G'(0) = \frac{1}{F'(\pi)} = \frac{1}{\frac{\sin \pi - \pi}{\pi^3}} = -\pi^2$$

Esercizio 4



Esercizio 5

Data la funzione

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

1. trovare il dominio $\mathcal{D}$
2. dimostrare che è invertibile in $\mathcal{D}$
3. calcolare il valore della derivata in $x = 1$
4. sia G l'invesa di F, calcolare $G'(0)$
5. definita la funzione $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$ (integrale esponeziale), funzione tabulata, esprimere $F(x)$ rispetto a questa funzione

Esercizio 5

Soluzione 1

La funzione integranda è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Per $t \to 0^+$ si ha

$$\frac{e^{-t}}{t} \to +\infty$$

Quindi l'integrale esiste in $(0, \ +\infty)$

Osserviamo che l'ordine di infinito per $t \to 0^+$ è 1 e quindi l'integrale non converge

Pertanto non possiamo estendere oltre il nostro dominio

$$\mathcal{D} = (0, \ +\infty)$$

Esercizio 5

Soluzione 2

La derivata di

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

è

$$F'(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

In $(0, \ +\infty)$ la derivata è $F'(x)$ è

$$F'(x) > 0 \text{ (strettamente crescente)}$$

Essendo strettamente crescente la funzione è anche invertibile

Esercizio 5

Soluzione 3

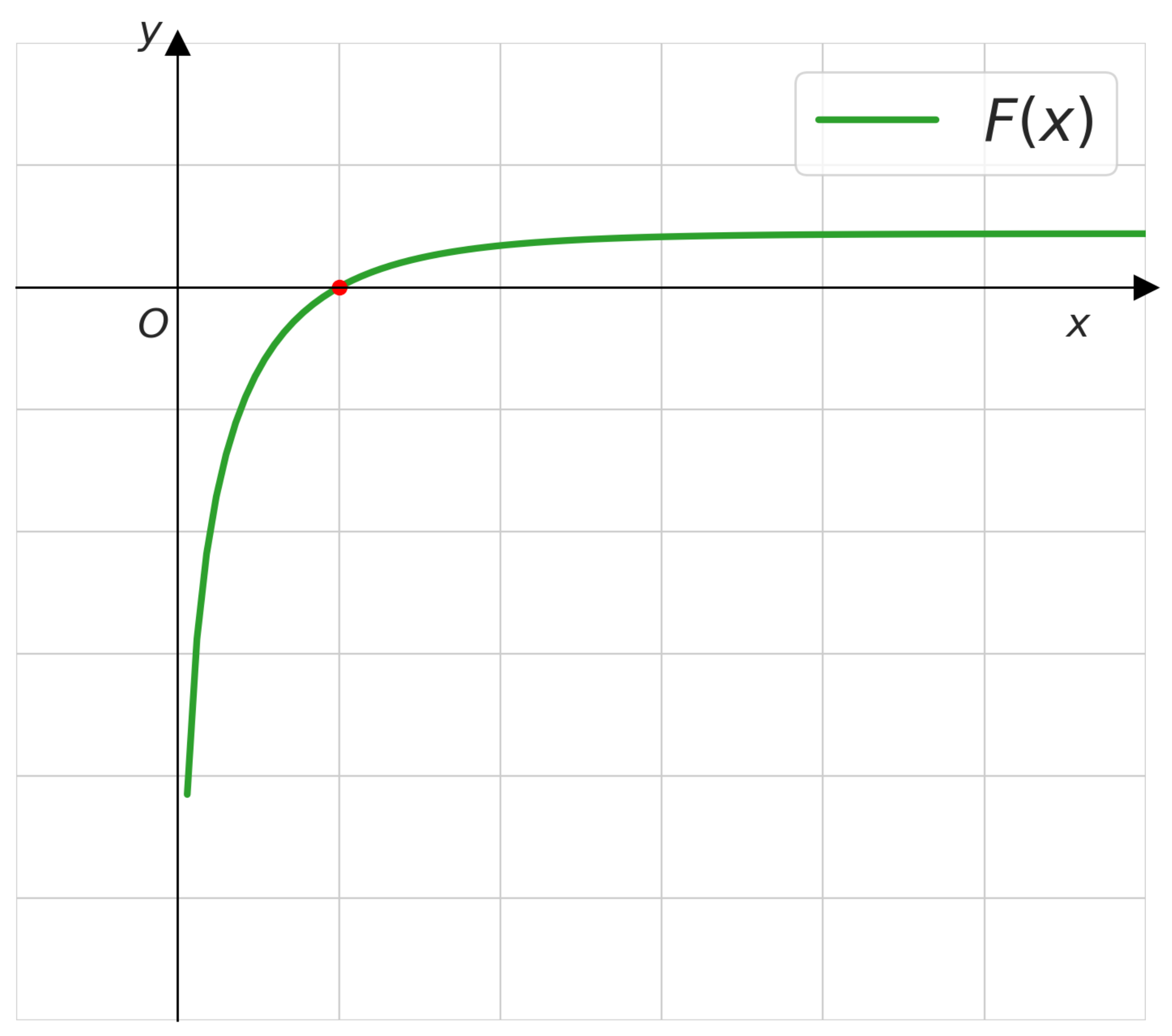
$$F'(1) = \left.\frac{e^{-x}}{x}\right|_{x=1} = \frac{e^{-1}}{1} = \frac{1}{e}$$

Soluzione 4

Da $F(1) = 0$ si ha

$$G'(0) = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$$

Esercizio 5



Esercizio 5

Dobbiamo esprimere

$$\int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

in termini di

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

Si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{e^{-t}}{t}\,dt \;=\; \begin{pmatrix} u = -t \\ du = -dt \end{pmatrix} \;=\; \int_{-1}^{-x} \frac{e^u}{-u}\cdot(-1)\,du \;=\; \int_{-1}^{-x} \frac{e^u}{u}\,du \\ &= \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^u}{u}\,du - \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^u}{u}\,du \;=\; \mathrm{Ei}(-x) - \mathrm{Ei}(-1) \end{aligned}$$


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)