Funzioni integrali

(Funzioni integrali) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 23 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Motivazione

Per definire il logaritmo si deve

- dare un senso alla scrittura $10^{\sqrt{2}}$ (potenza elevato ad un numero irrazionale)
- dimostrare l'unicità della soluzione $x = b^u$
- dimostrare le proprietà degli esponenziali (per ogni numero reale)

Alternativamente possiamo definire il logaritmo

$$\ln x \; = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

e da questa definizione dedurre tutte le sue proprietà e poi definire l'esponenziale

In questo modo si sfruttano tutti i concetti del calcolo integrale e differenziale

Funzione integrale

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$

Il teorema fondamentale del calcolo stabilisce che la seguente **funzione integrale**

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

con $x_0 \in [a, b]$ è derivabile in x (in particolare $F(x)$ è una funzione continua) e la derivata vale

$$F'(x) = f(x)$$

per ogni $x \in [a, b]$

Nota: $\displaystyle \int_{x_0}^{x_0} f(t)\,dt = 0$

Generalizzazione

Può accadere di dover studiare le funzione del tipo

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\, dt$$

dove gli estremi di integrazione sono delle funzioni (continue e derivabili)

Obiettivo generale:

- Studio della funzione integrale (o di una parte come ad esempio la derivata)

Nota: Nello studio del dominio della funzione integrale bisogna saper riconoscere l'ordine di convergenza dell'integrale

Teorema (derivata dell'integrale con estremi variabili)

> Per le funzioni integrali del tipo
>
> $$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$
>
> si ha
>
> $$F'(x) \;=\; f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

Teorema (derivata dell'integrale con estremi variabili)

Dimostrazione

Possiamo scrivere

$$F(x) \;=\; \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt \;=\; \int_{x_0}^{\beta(x)} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$

Ora, se definiamo $G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ si ha

$$\int_{x_0}^{\beta(x)} f(t)\,dt \;=\; G(\beta(x))$$

e quindi

$$F(x) \;=\; G(\beta(x)) - G(\alpha(x))$$

Teorema (derivata dell'integrale con estremi variabili)

La derivata di $G(\beta(x))$ si calcola facilmente osservando che

- la derivata di $G(x)$ è la funzione $f(x)$ (dal teorema fondamentale del calcolo)
- $G(\beta(x))$ è una funzione composta per cui posso applicare la regola di derivazione delle funzioni composte

Quindi si ha

$$[G(\beta(x))]' \;=\; G'(\beta(x)) \cdot \beta'(x) \;=\; f(\beta(x)) \cdot \beta'(x)$$

e quindi si ha

$$F'(x) \;=\; [G(\beta(x)) - G(\alpha(x))]' \;=\; f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

Esempio 1

Calcolare la derivata di

$$F(x) = \int_{(1-2x^2)^3}^{\sin x^2} e^{\sqrt{|t|}}\, dt$$

Soluzione

La derivata di $F(x)$ è

$$F'(x) \;=\; e^{\sqrt{|\sin x^2|}} \cdot \cos x^2 \cdot 2x - e^{\sqrt{|(1-2x^2)^3|}} \cdot 3(1-2x^2)^2 \cdot (-4x)$$

Esempio 2

> Studiare la funzione integrale
>
> $$F(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2-4t+5}\,dt$$

Soluzione

Il denominatore della funzione integranda si scrive

$$t^2-4t+5 \;=\; (t-2)^2+1>0$$

e quindi la funzione integranda è sempre continua

La derivata di $F'(x)$ è

$$F'(x) \;=\; \frac{x-1}{x^2-4x+5}$$

Esempio 2

Si ha

- $F(0) = \int_0^0 \frac{t-1}{t^2-4t+5}\, dt = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ perché la funzione integranda ha lo stesso ordine di $\frac{1}{x}$
- simile discorso per $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$

Quindi non ci sono asintoti orizzontali

Verifichiamo se ci sono asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{F(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{(H)}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+5} = 0$$

Quindi non ci sono asintoti obliqui (m deve essere diverso da 0)

Esempio 2

Per lo studio della derivata prima si ha

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+5}$$

e quindi (ricordando che $x^2-4x+5>0$)

- $F'(x)=0 \implies x-1=0 \implies x=1$
- $F'(x)>0 \implies x-1>0 \implies x>1$
- $F'(x)<0 \implies x-1<0 \implies x<1$

Esempio 2

Per lo studio della derivata seconda si ha

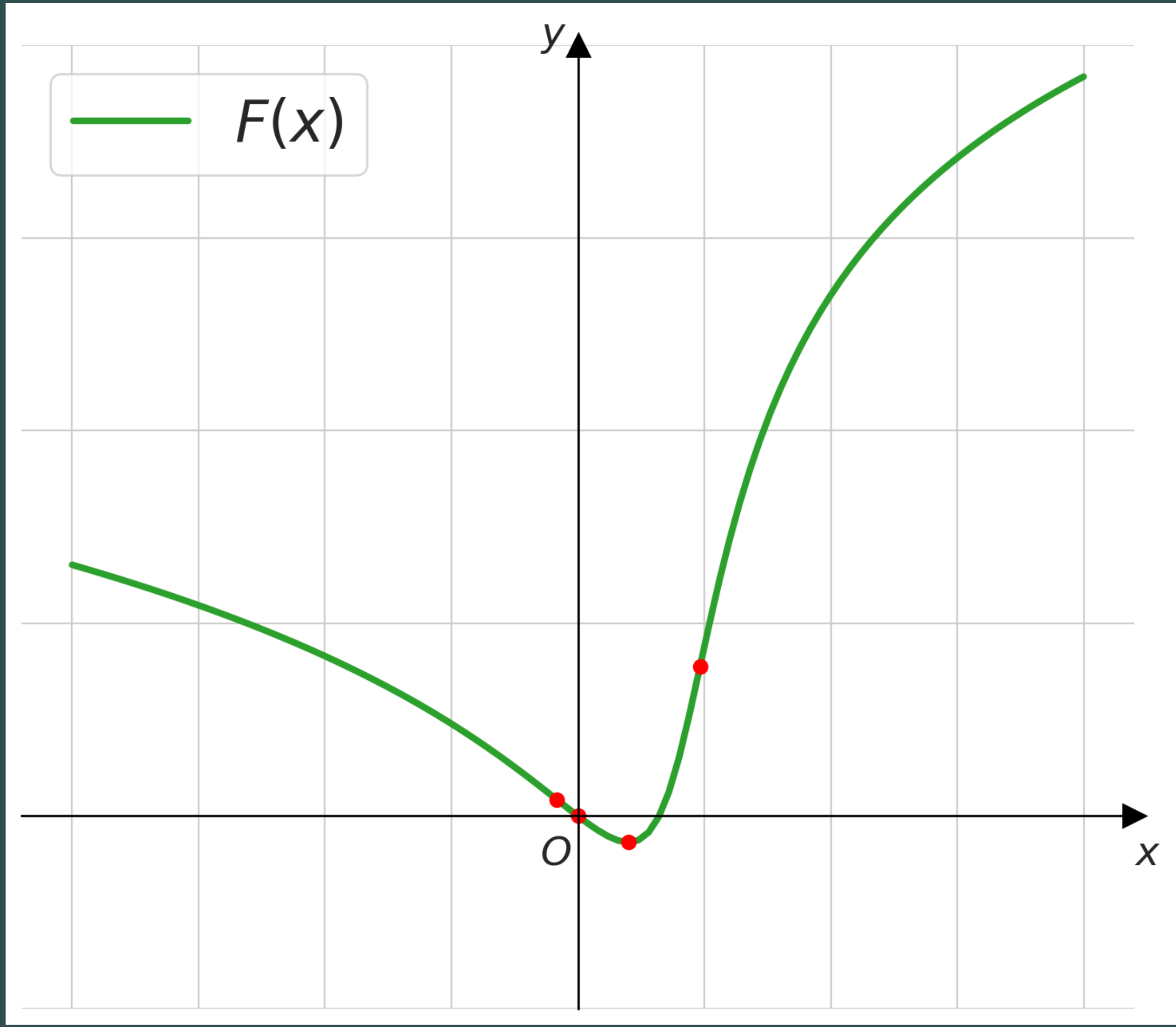
$$F''(x) \quad = \quad -\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$

da cui

- $F''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{2}$ (punti di flesso)
- $F''(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

Dalla studo della derivata seconda scopro che $x = 1$ è un punto di minimo ($F'(1) = 0$ e $F''(1) > 0$)

Esempio 2



Esempio 3

> Studiare la funzione integrale
>
> $$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t-1}\, dt$$

Soluzione

La funzione integranda possiede una discontinuità in $t = 1$

Quindi bisogna determinare il comportamento dell'integrale per

- $t \to 1^{\pm}$

Esempio 3

Per $t \to 1^-$ si ha

$$\frac{e^x}{t-1} \sim \frac{e^1}{(t-1)^1} = -\frac{e}{(1-t)^1}$$

che non è integrabile (l'integrale diverge a $-\infty$) per cui $F(x)$ non è definita per $x \geqslant 1$

Quindi il dominio di $F(x)$ è

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in (-\infty, \ 1)\}$$

Esempio 3

Osservazione

Se la funzione fosse stata definita nel seguente modo

$$F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t-1}\,dt$$

allora con un ragionamento simile al precedente si avrebbe che

- $F(x)$ non è definita per $x \leqslant 1$

e quindi il dominio di $F(x)$ sarebbe stato

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \in (1, \ +\infty)\}$$

Esempio 3

Si ha

- $F(0) = \int_0^0 \frac{e^t}{t-1}\,dt = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \ell$ (funz. integranda con ordine di convergenza superiore a $\frac{1}{x^2}$)

Il valore di ℓ si ottiene risolvendo

$$\ell \; = \; \int_0^{-\infty} \frac{e^t}{t-1}\,dt \; = \; -\int_{-\infty}^{0} \frac{e^t}{t-1}\,dt$$

che è possibile farlo solo per via numerica (non analitica)

Essendo la funzione integranda sempre negativa per $t < 1$ possiamo concludere che $\ell > 0$

Di conseguenza la funzione $F(x)$ ha un asintoto orizzontale in $y = \ell > 0$

Esempio 3

La derivata prima è

$$F'(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

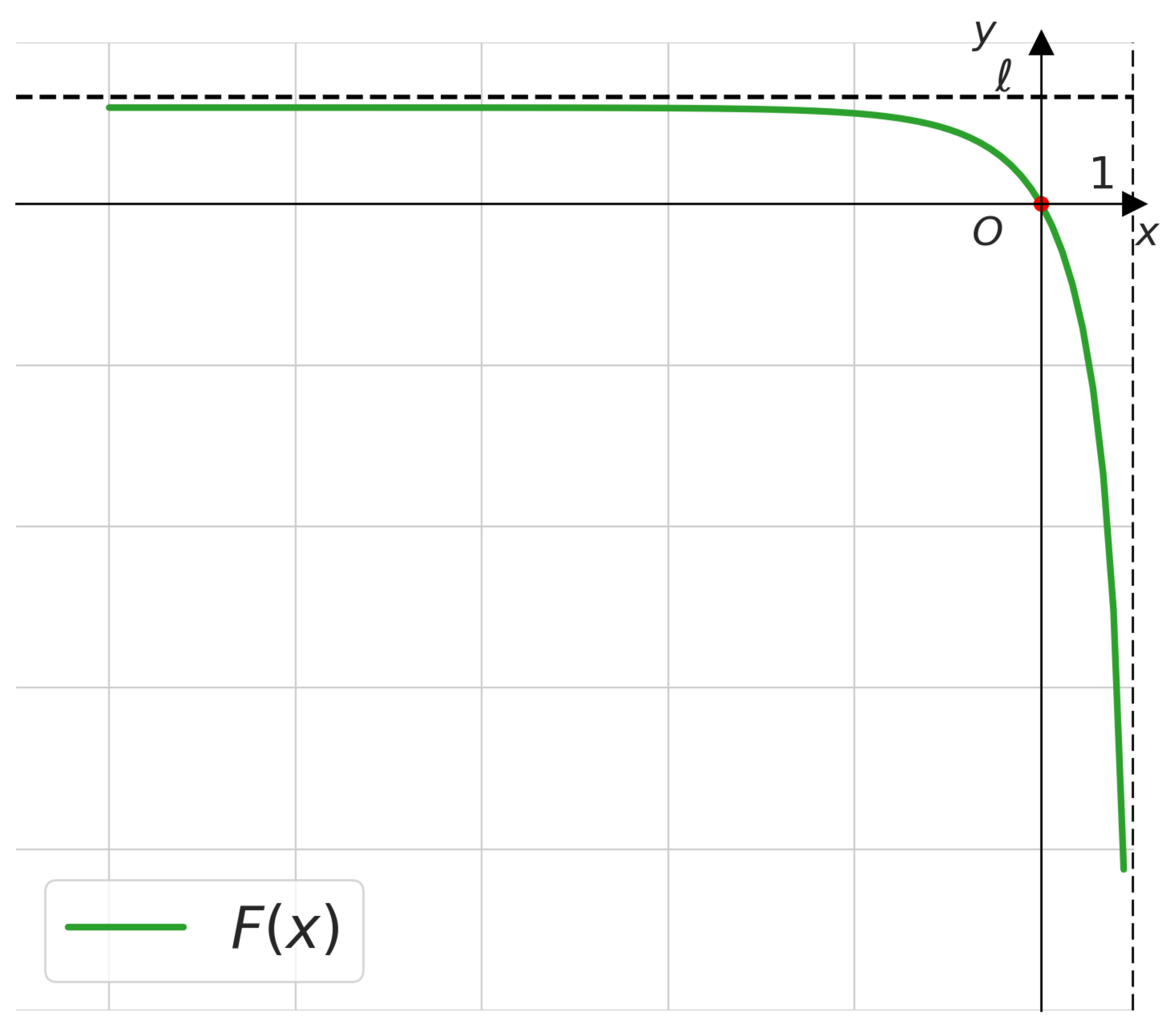
che non si annulla mai

Per $x < 1$ si ha

$$F'(x) < 0$$

quindi la funzione è strettamente decrescente

Esempio 3




FINE