

# Esercizi #8

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti integrali dipendenti da parametro  $\alpha$ :

1.  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_0^1 f(x) dx$  con  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha \alpha^x}$

2.  $\int_0^1 f(x) dx$ ,  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  con  $f(x) = \frac{\log |1 - x^2|}{x^\alpha}$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} dx$

4.  $\int_0^1 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} dx$  (e calcolarlo per  $\alpha = \frac{1}{2}$ )

5.  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log(\log x)} dx$

# Soluzione

# Esercizio 1

Sia  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha \alpha^x}$ . Dire per quali valori di  $\alpha$  sono convergenti i seguenti integrali

1.  $I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$

2.  $I = \int_0^1 f(x) dx$

## Soluzione

Perché abbia senso la scrittura  $\frac{1}{\alpha^x}$  deve essere  $\alpha > 0$

# Esercizio 1

## Soluzione 1

Da  $\frac{1}{\alpha^x} = e^{-x \log \alpha}$  si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \alpha^x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x \log \alpha}}{x^\alpha} dx$$

che risulta finito sse  $-\log \alpha < 0$  i.e.  $\alpha > 1$

# Esercizio 1

## Soluzione 2

Per  $x \rightarrow 0^+$ , con  $\alpha > 0$ , essendo  $\alpha^0 = 1$ , si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha \alpha^x} dx \sim \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

che converge per  $\alpha < 1$

Quindi l'integrale converge per  $0 < \alpha < 1$

# Esercizio 2

Sia  $f(x) = \frac{\log |1-x^2|}{x^\alpha}$ . Dire per quali valori di  $\alpha$  sono convergenti i seguenti integrali

1.  $I = \int_0^1 f(x) dx$

2.  $I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$

3.  $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$

## Premessa

La funzione è continua in  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$



# Esercizio 2

## Soluzione

Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha

$$\frac{\log |1 - x^2|}{x^\alpha} \sim \frac{x^2}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-2}}$$

che è finito se  $\alpha - 2 < 1$  i.e.  $\alpha < 3$

Per  $x \rightarrow 1$  si ha

$$\frac{\log |1 - x^2|}{x^\alpha} = \frac{\log |1 - x| + \log |1 + x|}{x^\alpha} \sim \log |1 - x|$$

che è finito

# Esercizio 2

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{\log |1 - x^2|}{x^\alpha} \sim \frac{\log x^2}{x^\alpha} = \frac{2 \log x}{x^\alpha}$$

che è integrabile sse  $\alpha > 1$

# Esercizio 2

## Soluzione 1

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ converge sse } \alpha < 3$$

## Soluzione 2

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge sse } \alpha > 1$$

## Soluzione 3

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge sse } 1 < \alpha < 3$$

# Esercizio 3

Sia  $f(x) = \frac{\arctan \sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha}$ . Dire per quali valori di  $\alpha$  è convergente il seguente integrale

$$I = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

## Soluzione

La funzione  $f(x)$  per  $x \geq 1$  è sempre positiva e continua in  $(1, +\infty)$

# Esercizio 3

Per  $x \rightarrow 1^+$  si ha

$$\frac{\arctan \sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} \sim \frac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} = \frac{1}{(x-1)^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

che è integrabile sse  $\alpha - \frac{1}{2} < 1$  i.e.  $\alpha < \frac{3}{2}$

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{\arctan \sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^\alpha}$$

che è integrabile sse  $\alpha > 1$

# Esercizio 3

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} dx$$

è integrabile sse

$$1 < \alpha < \frac{3}{2}$$

# Esercizio 4

Studiare al variare di  $\alpha$  la convergenza di  $I = \int_0^1 \frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} dx$  e calcolarlo  
per  $\alpha = \frac{1}{2}$

## Soluzione

Si ha

- per  $\alpha \leq 0$  l'integrale è finito
- per  $\alpha = 1$  si comporta come  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  e quindi è divergente
- per  $\alpha > 1$  l'integrale è finito

Studiamo il caso  $\alpha \in (0, 1)$

# Esercizio 4

Dal prodotto notevole

$$x^3 - \alpha^3 = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

si ha che il termine  $(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$  è finito per ogni  $x \in [0, 1]$ , quindi

$$\frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} = \frac{x^2}{|(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)|^\alpha} \sim \frac{x^2}{|x - \alpha|^\alpha}$$

Si ha,

- per  $x \rightarrow 0^+$   $\implies \frac{x^2}{|x - \alpha|^\alpha} \sim x^2$
- per  $x \rightarrow \alpha$   $\implies \frac{x^2}{|x - \alpha|^\alpha} \sim \frac{1}{|x - \alpha|^\alpha}$  che è convergente essendo  $\alpha \in (0, 1)$  minore di 1

e quindi l'integrale è finito per ogni  $\alpha \in (0, 1)$



# Esercizio 4

Per  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{x^2}{|x^3 - \alpha^3|^\alpha} = \frac{x^2}{\sqrt{|x^3 - \frac{1}{8}|}} = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{8} - x^3}} & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{8}}} & \text{se } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

quindi l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{|x^3 - \frac{1}{8}|}} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{\frac{1}{8} - x^3}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{8}}} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-3x^2}{\sqrt{\frac{1}{8} - x^3}} dx + \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 - \frac{1}{8}}} dx \\ &= -\frac{2}{3} \left[ \sqrt{\frac{1}{8} - x^3} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \left[ \sqrt{x^3 - \frac{1}{8}} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{8}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{1}{6} (\sqrt{2} + \sqrt{14}) \end{aligned}$$

# Esercizio 5

Studiare al variare di  $\alpha$  la convergenza di  $I = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log(\log x)} dx$

## Soluzione

Con la sostituzione  $u = \log x \iff e^u = x$  ( $du = \frac{1}{x} dx$ ) si ha

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log(\log x)} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{u(\alpha-1)} \log u} du$$

# Esercizio 5

Se  $\alpha > 1$  si ha

$$e^{u(\alpha-1)} \log u > e^{u(\alpha-1)}$$

e quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{u(\alpha-1)} \log u} du < \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{u(\alpha-1)}} du < +\infty$$

l'integrale converge

# Esercizio 5

Se  $\alpha \leq 1$  si ha

$$e^{u(\alpha-1)} \log u = \frac{\log u}{e^{u(1-\alpha)}} < \log u$$

e quindi

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^{u(\alpha-1)} \log u} du \geq \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log u} du = +\infty$$

l'integrale diverge

A close-up profile of a dog, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The dog has black fur with white markings on its face and chest. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the center of the dog's face.

FINE