

Esercizi #7

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti integrali dipendenti da parametro  $(\alpha, \beta)$

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 + |x|^\alpha + x^2} dx$  per  $\alpha > 0$

2.  $\int_0^1 \frac{(\arctan x)^\alpha}{(1 - \sqrt{x})^{\alpha - \frac{1}{2}}} dx$

3.  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (1 + x^2)^\beta} dx$

4.  $\int_0^1 x^\alpha \log \left| \frac{x}{x-1} \right| dx$

5.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha} dx$

# Soluzione

# Esercizio 1

Studiare al variare di  $\alpha > 0$  la convergenza di  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 + |x|^\alpha + x^2} dx$

## Soluzione

La funzione è integranda è continua in  $(-\infty, +\infty)$

Essendo una funzione pari, calcoliamo l'ordine di infinitesimo solo per  $x \rightarrow +\infty$

# Esercizio 1

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 + |x|^\alpha + x^2} \sim \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\max(\alpha, 2)}} = \frac{1}{x^{\max(\alpha, 2) - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{x \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{se } \alpha < 2 \\ \alpha - \frac{1}{2} & \text{se } \alpha \geq 2 \end{cases}}$$

Si ha

- Se  $0 < \alpha < 2$  l'integrale converge in quanto  $\frac{3}{2} > 1$
- Se  $\alpha \geq 2$  l'integrale converge sse  $\alpha - \frac{1}{2} > 1 \iff \alpha > \frac{3}{2}$ , quindi sempre vera (per ogni  $\alpha \geq 2$ )

Quindi, l'integrale converge per ogni  $\alpha > 0$

# Esercizio 2

Studiare al variare di  $\alpha$  la convergenza di  $I = \int_0^1 \frac{(\arctan x)^\alpha}{(1 - \sqrt{x})^{\alpha - \frac{1}{2}}} dx$

## Soluzione

La funzione integranda è continua in  $(0, 1)$

Quindi, studiamo il comportamento per  $x \rightarrow 0^+$  e per  $x \rightarrow 1^-$

# Esercizio 2

Per  $x \rightarrow 0^+$  con  $\arctan x \sim x$  si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(1 - \sqrt{x})^{\alpha - \frac{1}{2}}} \sim \frac{x^\alpha}{1} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$$

che converge per  $-\alpha < 1 \iff \alpha > -1$

Per  $x \rightarrow 1^-$  con  $\sqrt{x} = \sqrt{1 + (x - 1)} \sim 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$  si ha

$$\frac{(\arctan x)^\alpha}{(1 - \sqrt{x})^{\alpha - \frac{1}{2}}} \sim \frac{1}{(x - 1)^{\alpha - \frac{1}{2}}}$$

che converge per  $\alpha - \frac{1}{2} < 1 \iff \alpha < \frac{3}{2}$

Quindi, l'integrale converge per  $-1 < \alpha < \frac{3}{2}$



# Esercizio 3

Studiare al variare di  $\alpha, \beta$  la convergenza di  $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (1+x^2)^\beta} dx$

## Soluzione

Dobbiamo studiare il comportamento dell'integranda per

- $x \rightarrow 0^+$
- $x \rightarrow +\infty$

# Esercizio 3

Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha

$$\frac{1}{x^\alpha (1 + x^2)^\beta} \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

che converge per  $\alpha < 1$

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{1}{x^\alpha (1 + x^2)^\beta} \sim \frac{1}{x^\alpha \cdot x^{2\beta}} = \frac{1}{x^{\alpha+2\beta}}$$

che converge per  $\alpha + 2\beta > 1$

Quindi, affinché l'integrale converga globalmente devono verificare le due condizioni

$$\alpha < 1 \quad \text{e} \quad \alpha + 2\beta > 1$$

# Esercizio 4

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_0^1 x^\alpha \log \left| \frac{x}{x-1} \right| dx$

## Soluzione

La funzione è continua in  $(0, 1)$

Ricordiamo che l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (-\log x)^\beta} dx$$

converge sse

- $\alpha < 1$  e per ogni  $\beta$
- $\alpha = 1$  e  $\beta > 1$

# Esercizio 4

Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha

$$x^\alpha \log \left| \frac{x}{x-1} \right| \sim x^\alpha \log x = \frac{1}{x^{-\alpha} (\log x)^{-1}}$$

Quindi, l'integrale converge sse  $-\alpha < 1$  i.e.  $\alpha > -1$

# Esercizio 4

Per  $x \rightarrow 1^-$  si ha

$$x^\alpha \log \left| \frac{x}{x-1} \right| \sim -\log |x-1|$$

Ora con il cambio di variabile  $u = 1 - x$  con  $u \rightarrow 0^+$  si ha

$$-\log |x-1| = -\log t$$

Quindi, l'integrale ha  $\alpha = 0$  e  $\beta = -1$  e quindi converge sempre

# Esercizio 4

Riassumendo, l'integrale

$$\int_0^1 x^\alpha \log \left| \frac{x}{x-1} \right| dx$$

converge per ogni  $\alpha > -1$

# Esercizio 5

Studiare al variare di  $\alpha$  la convergenza di  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha} dx$

## Soluzione

La funzione integranda è continua in  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Dal momento che la funzione integranda è dispari, basta controllare l'integrabilità per

- $x \rightarrow 0^+$
- $x \rightarrow +\infty$

# Esercizio 5

Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha

$$\frac{\arctan x}{|x|^\alpha} \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

che è integrabile sse  $\alpha - 1 < 1$  i.e.  $\alpha < 2$

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{\arctan x}{|x|^\alpha} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^\alpha}$$

che è integrabile sse  $\alpha > 1$



# Esercizio 5

Quindi, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha} dx$$

converge sse

$$1 < \alpha < 2$$

A close-up profile of a dog, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The dog has black fur with white markings on its face and chest. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the center of the dog's face.

FINE