Esercizi #6

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti integrali dipedenti dal parametro α

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^{1-\alpha}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^\alpha}{1-\cos x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^\alpha \log\left(1+x^2\right)dx$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^\alpha dx$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(x\arctan x)^\alpha}{\sqrt{1+x^{3\alpha}}}\,dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Dire se è convergente il seguente integrale $I = \int_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^{1-\alpha}}\, dx$

Soluzione

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{\sin x^\alpha}{x^{1-\alpha}} \sim \frac{x^\alpha}{x^{1-\alpha}} = \frac{1}{x^{1-2\alpha}}$$

che converge sse $1 - 2\alpha < 1$ i.e. $\alpha > 1$

Esercizio 2

> Studiare al variare di α la convergenza di $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^\alpha}{1-\cos x}\, dx$

Soluzione

Per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{(\sin x)^\alpha}{1-\cos x} \sim \frac{x^\alpha}{x^2} = \frac{1}{x^{2-\alpha}}$$

che converge sse $2-\alpha<1$ i.e. $\alpha>1$

Esercizio 3

> Studiare al variare di α la convergenza di $$I = \int_1^2 \frac{x}{(1-x^2)^\alpha}\,dx$$

Soluzione

La funzione integranda è continua ovunque tranne che in $x = 1$

Per $x \to 1^+$ si ha

$$\frac{x}{(1-x^2)^\alpha} = \frac{x}{(1-x)^\alpha \cdot (1+x)^\alpha} \sim \frac{1}{2^\alpha (1-x)^\alpha}$$

che converge sse $\alpha < 1$

Esercizio 4

> Studiare al variare di α la convergenza di $I = \int_0^1 x^\alpha \log\left(1 + x^2\right) dx$

Soluzione

Notiamo che eventuali problemi si possono verificare in $x = 0$

Inoltre, per $x \to 0^+$ si ha

$$x^\alpha \log\left(1 + x^2\right) \sim x^\alpha \cdot x^2 = x^{\alpha+2} = \frac{1}{x^{-(\alpha+2)}}$$

che converge sse $-(\alpha + 2) < 1$ i.e. $\alpha > -3$

Nota: Per $x \geqslant 2$ la funzione è prolungabile per continuità in $x = 0$ i.e. l'integrale esiste anche nel senso di Cauchy-Riemann

Esercizio 5

> Studiare al variare di α la convergenza di $$I = \int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^\alpha dx$$

Soluzione

La funzione è continua in tutti il dominio di integrazione

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt{x^2+1} - x = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \sim \frac{1}{2x}$$

Esercizio 5

Di conseguenza

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^\alpha \sim \frac{1}{x^\alpha}$$

che è integrabile sse $\alpha > 1$

Esercizio 6

> Studiare al variare di α la convergenza di $I = \int_1^{+\infty} \frac{(x \arctan x)^\alpha}{\sqrt{1+x^{3\alpha}}}\, dx$

Soluzione

Ricordiamo che $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Quindi si ha

$$\frac{(x \arctan x)^\alpha}{\sqrt{1+x^{3\alpha}}} \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha x^\alpha}{\sqrt{x^{3\alpha}}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha}{x^{\frac{\alpha}{2}}}$$

che risulta finito solamente se $\frac{\alpha}{2} > 1$ i.e. $\alpha > 2$


FINE