

Esercizi #5

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti integrali (con il logaritmo)

$$1. \int_0^1 \frac{x-1}{\log(1-x)} dx$$

$$2. \int_1^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x| \log |x|}{1+x^2} dx$$

$$4. \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\log x}} dx$$

$$5. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \log(\log x)} dx$$

$$6. \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$$

$$7. \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$8. \int_2^{+\infty} \frac{x \log\left(\frac{x}{\log x}\right)}{\log^2(1+x^x)} dx$$

# Soluzione

# Esercizio 1

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\log(1-x)} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $(0, 1)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow 1^-$

Si ha

$$x \rightarrow 0^+ \implies \log(1-x) \sim 1-x + O(x^2) \implies \frac{x-1}{\log(1-x)} \sim \frac{1}{x}$$

La funzione integranda è infinita di ordine 1 per  $x \rightarrow 0^+$ , quindi non è localmente integrabile.

Dal momento che non è integrabile in 0 non lo sarà nemmeno su tutto l'intervallo.

# Esercizio 1

A titolo di completezza si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{\log(1 - x)} = \left[ \frac{0^-}{-\infty} \right] = 0$$

Essendo prolungabile per continuità non ci sono problemi in  $x = 1$

# Esercizio 2

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_1^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[1, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$

Si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0^+ \implies \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

# Esercizio 2

Quindi, si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

che è infinitesima di ordine  $\frac{1}{2}$

Per il teorema del confronto  $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$  e quindi l'integrale non converge



# Esercizio 3

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x| \log |x|}{1+x^2} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $(-\infty, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow \pm\infty$

La funzione è pari e quindi possiamo limitare lo studio a  $x \rightarrow +\infty$

Si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{|x| \log |x|}{1+x^2} \sim \frac{x \log x}{x^2} = \frac{\log x}{x}$$

# Esercizio 3

Ricordiamo che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} dx$$

converge per ogni  $\alpha > 1$

Quindi

$$f(x) \sim \frac{\log x}{x}$$

non converge ( $\alpha = 1$ )

# Esercizio 4

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{\log x}} dx$

## Soluzione

La funzione ha problemi per  $x \rightarrow 1^+$

Per  $x \rightarrow 1^+$  si ha  $\log x \rightarrow 0$  e quindi si ha

$$\log x = \log(1 + (x - 1)) \sim (x - 1) + O(x^2)$$

Da

$$\frac{1}{\sqrt{\log x}} \sim \frac{1}{\sqrt{(x - 1)}}$$

si ha che l'integrale converge  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

# Esercizio 5

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \log(\log x)} dx$

## Soluzione

Con la sostituzione  $u = \log x$  ( $du = \frac{1}{x} dx$ ) si ha

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \log(\log x)} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log u} du$$

Quindi  $I$  non converge

# Esercizio 6

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx$

## Soluzione

Per  $x > 1$  si ha  $\log x < \sqrt{x}$  e quindi

$$0 < \frac{\log x}{x^2} < \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi l'integrale è convergente ( $\alpha = \frac{3}{2}$ )

# Esercizio 7

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\frac{3}{2}}} dx$

## Soluzione

Con la sostituzione  $u = \log x$  ( $du = \frac{1}{x} dx$ ) si ha

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

Questo integrale è convergente  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$

# Esercizio 8

Dire se è convergente il seguente integrale

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{x \log \left( \frac{x}{\log x} \right)}{\log^2 (1 + x^x)} dx$$

## Soluzione

La funzione è sempre positiva

## Numeratore

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$x \log \left( \frac{x}{\log x} \right) = x (\log x - \log (\log x)) \sim x \log x$$

# Esercizio 8

## Denominatore

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\log^2(1 + x^x) \sim \log^2(x^x) = (x \log x)^2 = x^2 \log^2 x$$

**Funzione integranda** Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\frac{x \log \left( \frac{x}{\log x} \right)}{\log^2(1 + x^x)} \sim \frac{x \log x}{x^2 \log^2 x} = \frac{1}{x \log x}$$

quindi l'integrale non è convergente



A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE