

Esercizi #4

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti integrali (su intervallo illimitato)

$$1. \int_{\pi}^{+\infty} \left( 1 - \cos \frac{1}{x} \right) dx$$

$$2. \int_{\pi}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$3. \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$$

$$4. \int_{-\infty}^{-2} \frac{2x^2 - x + 3}{-x^3 + 2x + 1} dx$$

$$5. \int_1^{+\infty} \frac{x + \sin x}{2x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{x + 1}{(x - 1)^3} dx$$

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$$

$$8. \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$$

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# Soluzione

# Esercizio 1

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_{\pi}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[\pi, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$

Si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \implies \cos \frac{1}{x} \sim 1 - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

# Esercizio 1

Quindi, si ha

$$1 - \cos \frac{1}{x} \sim 1 - 1 + \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^2}$$

che è infinitesima di ordine 2

Per il teorema del confronto  $\alpha = 2 > 1$  e quindi l'integrale converge

# Esercizio 2

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_{\pi}^{+\infty} \sin \frac{1}{x} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[\pi, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$

Si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \implies \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

# Esercizio 2

Quindi, si ha

$$\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$$

che è infinitesima di ordine 1

Per il teorema del confronto  $\alpha = 1 \leq 1$  e quindi l'integrale non converge



# Esercizio 3

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[\pi, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$

Si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \implies \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

# Esercizio 3

Quindi, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left( \frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

che è infinitesima di ordine  $\frac{3}{2}$

Per il teorema del confronto  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$  e quindi l'integrale converge

# Esercizio 4

Dire se è convergente il seguente integrale

$$I = \int_{-\infty}^{-2} \frac{2x^2 - x + 3}{-x^3 + 2x + 1} dx$$

## Soluzione

Gli zeri di  $-x^3 + 2x + 1$  sono:

- $x = -1$  (si verifica facilmente)
- $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  (dall'equazione di secondo grado che ne risulta)

Quindi la funzione è continua in  $(-\infty, 2]$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow -\infty$

# Esercizio 4

Per  $x \rightarrow -\infty$  si ha

$$\frac{2x^2 - x + 3}{-x^3 + 2x + 1} \sim \frac{2x^2}{-x^3} = \frac{-2}{x}$$

Per il teorema del confronto  $\alpha = 1 \leq 1$  e quindi l'integrale non converge

# Esercizio 5

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_1^{+\infty} \frac{x + \sin x}{2x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[1, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$

Si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{x + \sin x}{2x^3 + \sqrt[3]{x}} \sim \frac{x}{2x^3} = \frac{1}{2x^2}$$

che è infinitesima di ordine 2

Per il teorema del confronto  $\alpha = 2 > 1$  e quindi l'integrale converge

# Esercizio 6

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{(x-1)^3} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[0, 1) \cup (1, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow 1$  e  $x \rightarrow +\infty$

# Esercizio 6

Si ha

$$x \rightarrow 1 \implies \frac{x+1}{(x-1)^3} \sim \frac{2}{(x-1)^3}$$

che è infinita di ordine  $\alpha = 3 > 1$  e quindi (intervallo limitato) non converge in un intorno di 1

Inoltre, si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{x+1}{(x-1)^3} \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2}$$

che è infinitesima di ordine  $\alpha = 2 > 1$  e quindi converge

Quindi l'integrale  $I$  non converge

# Esercizio 7

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[1, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$

Si ha

$$x \rightarrow +\infty \implies \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{1+x}} \sim \frac{1}{x^2} \cdot 1 = \frac{1}{x^2}$$

che è infinitesima di ordine  $\alpha = 2 > 1$  e quindi l'integrale converge



# Esercizio 8

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$

## Soluzione

La funzione integranda  $f(x)$  è continua in  $[1, +\infty)$

Quindi dobbiamo studiarne il comportamento per  $x \rightarrow +\infty$

Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  (limitata) quindi

$$\frac{\arctan x}{x} \sim \frac{\pi}{2x}$$

Essendo  $\alpha = 1 \leq 1$  l'integrale non converge

A close-up profile of a dog, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The dog has black fur with white markings on its face and chest. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the center of the dog's face.

FINE