

Esercizi #2

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Indice degli esercizi

Studiare la convergenza dei seguenti integrali (su intervallo limitato) attrarso delle maggiorazioni

$$1. \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{x^4 + \sqrt{x}} dx$$

**Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento**

# Soluzione

# Esercizio 1

Dire se è convergente il seguente integrale  $I = \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x}} dx$

## Soluzione

La funzione è positiva e continua in  $[-1, 0) \cup (0, 1]$ .

Inoltre si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Quindi, è sicuramente integrabile in  $[-1, 0)$ , e quindi resta da verificare l'integrabilità in  $(0, 1]$

# Esercizio 1

Per  $x \in (0, 1]$  si ha

$$e^{\frac{1}{x}} > \frac{1}{x}$$

quindi

$$\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx > \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$$

Quindi l'integrale  $I$  diverge

# Esercizio 2

Dire se è convergente il seguente integrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

## Soluzione

Se seguiamo questo ragionamento

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

abbiamo che  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  diverge, e quindi non possiamo concludere nulla sulla convergenza di  $I$

# Esercizio 2

Per  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$  si ha (è una funzione strettamente decrescente nell'intervallo in considerazione)

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

e quindi

$$\frac{\sin x}{x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi x}$$

Quindi l'integrale  $I$  diverge



# Esercizio 3

Dire se è convergente il seguente integrale

$$I = \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

## Soluzione

Si ha

$$\left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

e quindi l'integrale  $I$  converge

# Esercizio 4

Dire se è convergente il seguente integrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^4 + \sqrt{x}} dx$$

## Soluzione

La funzione è continua tranne che in  $x = 0$

In un intorno dello zero si ha

$$\frac{1}{x^4 + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

infatti

$$\sqrt{x} < x^4 + \sqrt{x} \iff 0 < x^4$$

che risulta vera

# Esercizio 4

La funzione integranda è sempre positiva e inoltre

Quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4 + \sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < +\infty$$

Quindi l'integrale converge

A close-up profile of a dog, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The dog has black fur with white markings on its face and chest. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE