Esercizi #1

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Indice degli esercizi

Calcolare i seguenti integrali impropri

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+9x^2}\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{2-x}\, dx$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x \sin x\, dx$
6. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx$
7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx$
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Se vi piace iscrivetevi al canale, mettete un mi piace o lasciate un commento

Soluzione

Esercizio 1

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_1^{+\infty} xe^{-x}\, dx$

Soluzione

La primitiva di $f(x) = xe^{-x}$ è

$$\int xe^{-x}\, dx = \begin{pmatrix} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^{-x}, & v = -e^{-x} \end{pmatrix} = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx$$
$$= -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x} + C$$

Esercizio 1

Pertanto

$$\begin{aligned} I &= \left[-(x+1)e^{-x}\right]_1^{+\infty} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left[-(x+1)e^{-x}\right]_1^{t} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \left(-(t+1)e^{-t}\right) + \frac{2}{e} \\ &= +\frac{2}{e} \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che

$$\lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$$

Esercizio 2

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+9x^2}\,dx$

Soluzione

La primitiva di $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$ è

$$\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+9x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\arctan(3x) + C$$

Esercizio 2

Pertanto

$$
\begin{aligned}
I &= \left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]_0^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\arctan(3x)\right]_0^{t} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\arctan(3t)\right) - 0 \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Esercizio 3

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Soluzione

La primitiva di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ è

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{2} + C$$

Esercizio 3

Pertanto

$$
\begin{aligned}
I = & \left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^2 \\
= & \lim_{t\to 2^-}\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^t \\
= & \lim_{t\to 2^-}\left(\arcsin\frac{t}{2}\right) - 0 \\
= & \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_0^2 \frac{1}{2-x}\,dx$

Soluzione

La primitiva di $f(x) = \frac{1}{2-x}$ è

$$\int \frac{1}{2-x}\,dx = -\int \frac{-1}{2-x}\,dx = -\log|2-x| + C$$

Esercizio 4

Pertanto

$$\begin{aligned} I &= \left[-\log|2-x|\right]_0^2 \\ &= \lim_{t\to 2^-} \left[-\log|2-x|\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to 2^-} (-\log|2-t|) - (-\log 2) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (-\log\varepsilon) + \log 2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Il limite non esiste e quindi l'integrale non converge

L'integrale diverge a $+\infty$

Esercizio 5

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_{-\infty}^{0} e^x \sin x \, dx$

Soluzione

Calcoliamo una primitiva

$$\int e^x \sin x \, dx \;=\; \begin{pmatrix} u = \sin x, & u' = \cos x \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} \;=\; e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx$$

$$\int e^x \cos x \, dx \;=\; \begin{pmatrix} u = \cos x, & u' = -\sin x \\ v' = e^x, & v = e^x \end{pmatrix} \;=\; e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx$$

da cui

$$\int e^x \sin x \, dx \;=\; e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \;=\; e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\implies \int e^x \sin x \, dx \;=\; \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) e^x + C$$

Esercizio 5

Pertanto

$$
\begin{aligned}
I &= \left[\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) e^x\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \lim_{t\to-\infty} \left[\left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right) e^x\right]_{t}^{0} \\
&= -\frac{1}{2} - \lim_{t\to-\infty} \left(\left(\frac{\sin t - \cos t}{2}\right) e^t\right) \\
&= -\frac{1}{2} + 0 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

Soluzione

Calcoliamo una primitiva

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x-1)(x+1)}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{(1+x)+(1-x)}{(x-1)(x+1)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

Esercizio 6

Pertanto

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_3^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_3^{t} \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right] - \left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{3-1}{3+1}\right|\right] \\
&= \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}$$

Esercizio 7

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$

Soluzione

Calcoliamo la primitiva di $\frac{1}{x^2}$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; -\frac{1}{x} + C$$

Esercizio 7

La funzione integranda $\frac{1}{x^2}$ è singolare in $x = 0$, quindi dobbiamo strudiare i seguenti due integrali

$$I = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\, dx}_{I_A} + \underbrace{\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\, dx}_{I_B}$$

Ora

$$\begin{aligned} I_A &= \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{0} = \lim_{t\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{t} \\ &= \lim_{t\to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-} \left(-\frac{1}{t}\right) - \left(-\frac{1}{-1}\right) \\ &= +\infty - 1 = \infty \end{aligned}$$

I_A non converge e quindi nemmeno I

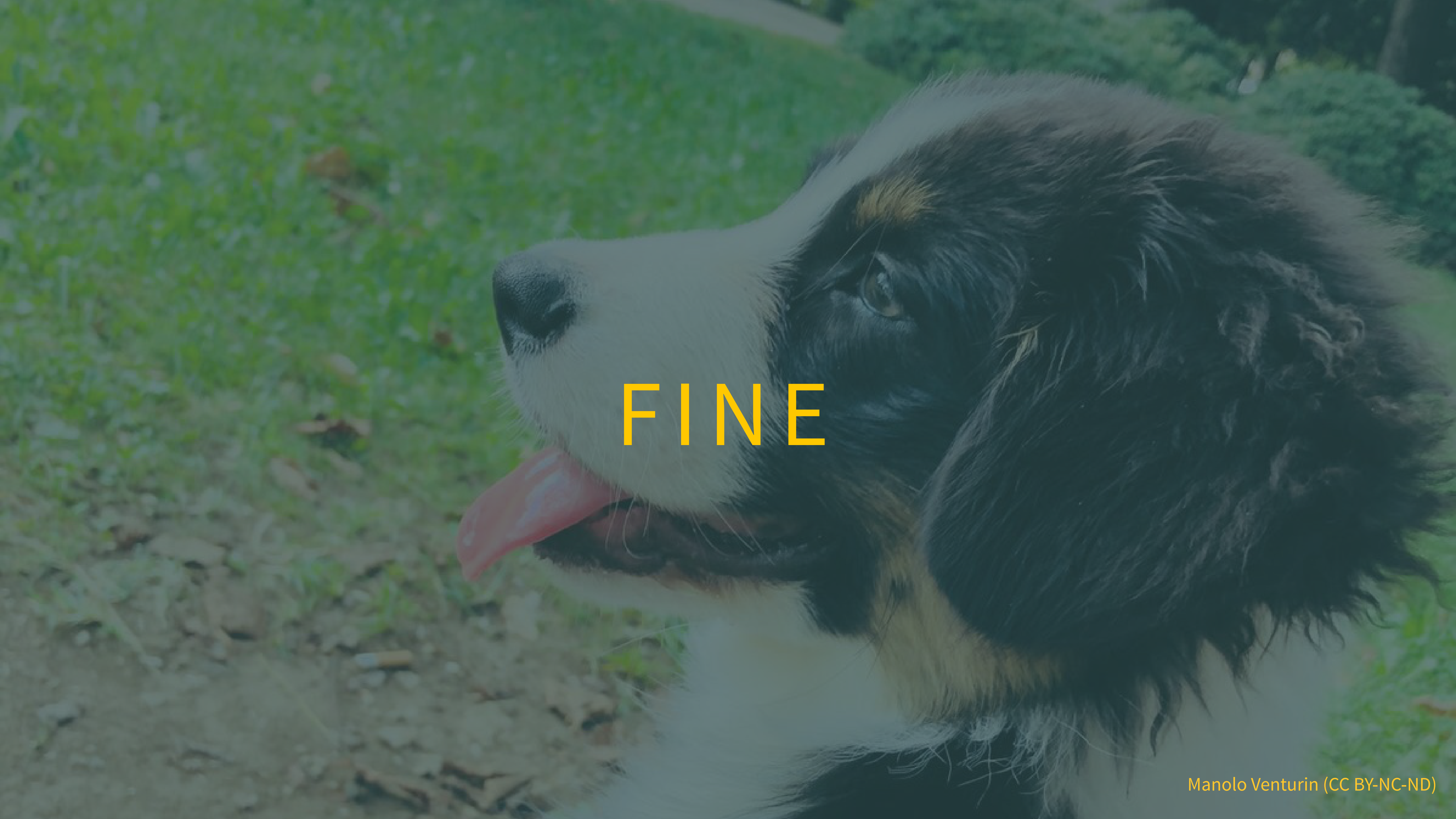
Esercizio 8

> Calcolare il seguente integrale improprio $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Soluzione

La primitiva di $\frac{1}{1+x^2}$ è $\arctan x$

$$
\begin{aligned}
I &= \left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \arctan t - \lim_{t\to-\infty} \arctan t \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi
\end{aligned}
$$


FINE