Integrale improprio con il log

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Proprietà logaritmo / esponenziale

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ (potenza positiva), allora

- “L’espondenziale vince verso la potenza”, i.e.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^\alpha} = 0$$

- “Il logaritmo perde verso la potenza”, i.e.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad , \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{log(x)}{x^\alpha} = +\infty$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

> Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ è finito il seguente integrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^\beta}\, dx$

Soluzione

Con la sostituzione $u = \log x \iff e^u = x$ $(du = \frac{1}{x}\, dx \iff e^u\, du = dx)$ si ha

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^\beta}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^\beta} \cdot e^u\, du = \int_1^{+\infty} \frac{e^u}{u^\beta}\, du$$

che (essendo la funzione integranda positiva e crescente, tendente a $+\infty$) si ha che l'integrale non converge per nessun valore di β

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

Riasssumendo

L'integrale

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^\beta}\, dx$$

non converge per nessun valore di β

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

> Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è finito il seguente integrale $$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\,dx$$

Nota

Per studiare la convergenza di questo integrale prendiamo come riferimento la funzione $\frac{1}{x}$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

Soluzione

Sia $\alpha > 1$. Se $\alpha = 1 + 2\varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$ con

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log(x)}{x^{\varepsilon}} = 0 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

allora $\exists M > 0$ tale che

$$\frac{log(x)}{x^{\varepsilon}} < 1$$

e quindi si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx \;=\; \underbrace{\int_1^{M} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx}_{\text{finito}} + \int_M^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

Ora per $\alpha = 1 + 2\varepsilon > 1$ si ha

$$\int_M^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx \leqslant \int_M^{+\infty} \frac{\log x}{x^{1+\varepsilon}\, x^\varepsilon}\, dx \leqslant \int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\, dx$$

che risulta convergente (esponente maggiore di 1)

Quindi l'integrale I converge per ogni $\alpha > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

Sia $\alpha < 1$. Se $\alpha = 1 - 2\varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\varepsilon} \cdot log(x) = +\infty \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

allora $\exists M > 0$ tale che

$$x^{\varepsilon} log(x) > 1$$

e quindi si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx = \underbrace{\int_1^{M} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx}_{\text{finito}} + \int_M^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\, dx$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

Ora per $\alpha = 1 - 2\varepsilon < 1$ si ha

$$\int_M^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx \geqslant \int_M^{+\infty} \frac{x^\varepsilon \log x}{x^{1-\varepsilon}}\, dx \geqslant \int_M^{+\infty} \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\, dx$$

che risulta divergente (esponente minore di 1)

Quindi l'integrale I diverge per ogni $\alpha < 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

Per $\alpha = 1$ si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x}\, dx = \int_1^{+\infty} \log x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2}\log^2(x)\right]_1^{+\infty} = +\infty$$

Quindi l'integrale I diverge per $\alpha = 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

Riasssumendo

L'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx$$

converge per ogni $\alpha > 1$

Nota: Per questo integrale era possibile calcolare la primitiva mediante integrazione per parti

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

> Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ è finito il seguente integrale $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\log x)^\beta}\,dx$$

Nota: Il meno tra parentesi garantisce che l'integranda è sempre positiva (quindi l'integrale converge o diverge)!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

Soluzione

In questo caso riusciamo a calcolare una primitiva

$$\int \frac{1}{x(-\log x)^\beta}\,dx \;=\; \left(u = -\log x,\quad du = -\tfrac{1}{x}\,dx\right) \;=\; -\int \frac{1}{u^\beta} du \;=\; \begin{cases} -\log(-\log x) & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{(-\log x)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{se } \beta \neq 1 \end{cases}$$

Caso: $\beta = 1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\log x)}\,dx \;=\; \lim_{t\to 0^+} \left[-\log(-\log x)\right]_t^{\frac{1}{2}} \;=\; +\infty$$

Quindi l’integrale non converge

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

Caso: $\beta \neq 1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\log x)^{\beta}}\, dx = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{(-\log x)^{1-\beta}}{\beta - 1} \right]_t^{\frac{1}{2}} = \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{\beta - 1} - \frac{(-\log t)^{1-\beta}}{\beta - 1}$$

dove, per $t \to 0^+$ il termine

$$\frac{(-\log t)^{1-\beta}}{\beta - 1} \to 0 \iff 1 - \beta < 0$$

i.e. l'integrale converge sse

$$1 - \beta < 0 \iff \beta > 1$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

Riasssumendo

L'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(-\log x)^\beta}\, dx$$

converge per $\beta > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

> Dire per quali valori di $\beta \in \mathbb{R}$ è finito il seguente integrale $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx$$

Nota:

- La funzione integranda è sempre positiva quindi l'integrale converge o diverge
- Due strategie risolutive (calcolo diretto / sostituzione)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

Soluzione (metodo 1)

In questo caso riusciamo a calcolare una primitiva

$$\int \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx \;=\; \left(u = \log x, \quad du = \tfrac{1}{x}\, dx \right) \;=\; \int \frac{1}{u^\beta} du \;=\; \begin{cases} \log(\log x) & \text{se } \beta = 1 \\ \frac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{se } \beta \neq 1 \end{cases}$$

Caso: $\beta = 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx \;=\; \lim_{t \to +\infty} \left[\log(\log x)\right]_2^t \;=\; +\infty$$

Quindi l'integrale non converge

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

Caso: $\beta \neq 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{(\log x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right]_2^t = \frac{(\log t)^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

dove, per $t \to +\infty$ il termine

$$\frac{(\log t)^{1-\beta}}{1-\beta} \to 0 \iff 1-\beta < 0$$

i.e. l'integrale converge sse

$$1-\beta < 0 \iff \beta > 1$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

Soluzione (metodo 2)

Con il cambio di variabile $u = \frac{1}{x}$ si ha

- $x = \frac{1}{u} = u^{-1}$
- $dx = -\frac{1}{u^2}\, du$
- per $x = 2 \implies u = \frac{1}{2}$
- per $x \to +\infty \implies u \to 0^+$

Quindi si ha

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{0^+} \frac{1}{\frac{1}{u}(-\log u)^\beta} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_{0^+}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{u(-\log u)^\beta}\, du$$

che dall'esempio precedente n.3 sappiamo che converge per $\beta > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 4

Riasssumendo

L'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^\beta}\, dx$$

converge per $\beta > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5

> Dire per quali valori di $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx$$

Soluzione

Nota:

- Seguiamo l'idea dell'esempio n. 2
- Il caso $\alpha = 1$ lo abbiamo risolto all'esempio n. 4, e converge sse $\beta > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5

Se $\alpha > 1$ e $\varepsilon > 0$ è tale che $\alpha > 1 + \varepsilon$ allora $\exists M > 0$ tale che

$$\frac{1}{x^{\alpha}(\log x)^{\beta}} \leqslant \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$

e quindi

- l'integrale a secondo membro è convergente (esponenziale maggiore stretto di 1)
- di conseguenza per confronto l'integrale di partenza è convergente

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5

Se $\alpha < 1$ e $\varepsilon > 0$ è tale che $\alpha < 1 - \varepsilon$ allora $\exists M > 0$ tale che

$$\frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \geqslant \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$$

e quindi

- l'integrale a secondo membro è divergente (esponenziale minore stretto di 1)
- di conseguenza per confronto l'integrale di partenza è divergente

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 5

Riasssumendo

L'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\, dx$$

converge sse

- $\alpha > 1$ e per ogni β
- $\alpha = 1$ e $\beta > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 6

> Dire per quali valori di $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ è finito l'integrale $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (-\log x)^\beta}\, dx$$

Soluzione

Con il cambio di variabile $u = \frac{1}{x}$ con

- $x = \frac{1}{u} = u^{-1}$ con $dx = -\frac{1}{u^2}\, du$
- per $x = \frac{1}{2} \implies u = 2$ e per $x \to 0^+ \implies u \to +\infty$

l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha (-\log x)^\beta}\, dx = \int_{+\infty}^{2} \frac{1}{u^{-\alpha} (\log u)^\beta} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_2^{+\infty} \frac{1}{u^{2-\alpha} (\log u)^\beta}\, du$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 6

Quindi, dall'esempio precedente n. 5

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{u^{2-\alpha}(\log u)^\beta}\, du$$

converge sse

- $2-\alpha > 1$ $(\alpha < 1)$ e per ogni β
- $2-\alpha = 1$ $(\alpha = 1)$ e $\beta > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 6

Riasssumendo

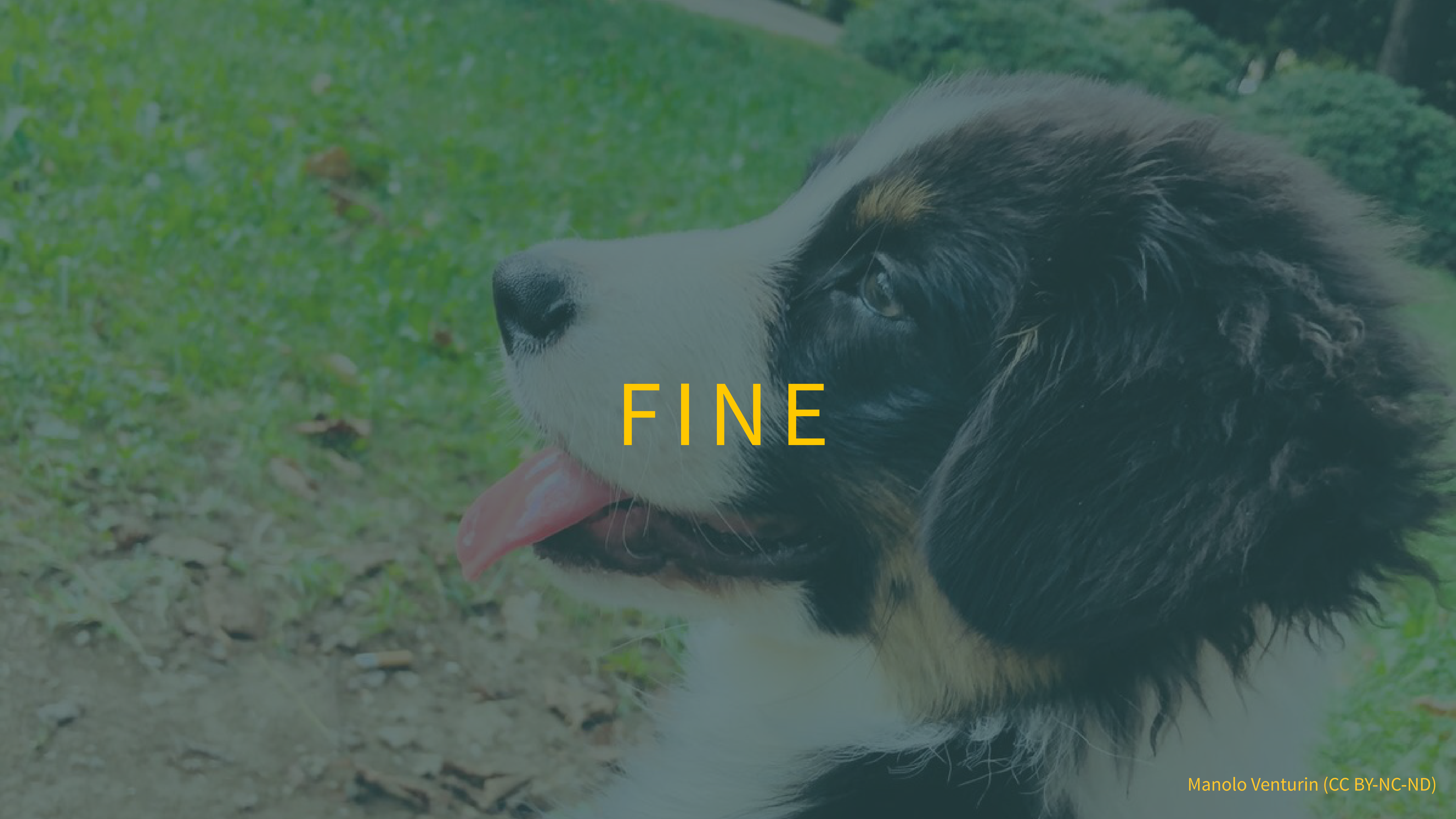
L'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha(-\log x)^\beta}\,dx$$

converge sse

- $\alpha < 1$ e per ogni β
- $\alpha = 1$ e $\beta > 1$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)


FINE
Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)