

Integrale improprio su intervallo illimitato e criteri del confronto

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

# Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!



# Criteri di confronto

Studio della convergenza dell'integrale improprio (senza il calcolo della primitiva che potrebbe non essere possibile)

Si utilizzano i **criteri di confronto** per

- $f$  non negativa, simile ragionamento per  $f$  non positiva
- Segno di  $f$  non definito (studio l'integrale con il valore assoluto di  $f$ , i.e.  $|f|$ )

Ricordiamo che  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  non negativa allora l'integrale improprio  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  o converge o diverge positivamente

# Teorema

Siano  $f$  e  $g$  due funzioni localmente integrabili su  $[a, +\infty)$  t.c.  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \in [a, +\infty)$ . Allora

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

Inoltre,

- se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  diverge, allora  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  diverge
- se  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  converge, allora  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge

# Esempio 1

Studiare il comportamento di  $I = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$

## Soluzione

$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$  non ammette primitiva elementare, quindi dobbiamo procedere attraverso delle stime per studiarne il comportamento

# Esempio 1

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Per  $x > 1$  si ha  $x^2 > x$  e quindi  $-x^2 < -x$  e  $e^{-x^2} < e^{-x}$  (l'esponenziale è una funzione crescente)

Si ha

$$0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx < \int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$$

e quindi, per il criterio del confronto,  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$  è convergente

# Criterio del confronto asintotico

Supponiamo che  $g(x) \neq 0$  su  $\in [a, +\infty)$  e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

i.e. esista finito e non nullo. Allora  $f$  è integrabile in senso improprio se e solo se anche  $g$  lo è.

**Nota:** Tipicamente il confronto viene fatto con  $\frac{1}{x^\alpha}$ , i.e.  $f(x) \sim \frac{\ell}{x^\alpha}$  per  $x \rightarrow +\infty$

# Teorema

Si ha

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \sim \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

allora

- $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge sse  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  converge sse  $\alpha > 1$
- $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  diverge sse  $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  diverge sse  $\alpha \leq 1$

# Esempio 2 (tipico)

Esaminare il comportamento di  $I = \int_1^{+\infty} \left( e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right) dx$

## Soluzione

Ricordiamo che per  $x \rightarrow 0$  si ha  $e^x = 1 + x + O(x^2) \implies e^x - 1 = x + O(x^2)$

Per  $x \rightarrow +\infty$ , e si ha  $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$  e quindi

$$\left( e^{\frac{1}{x^2}} - 1 \right) \sim \frac{1}{x^2}$$

e quindi  $\alpha = 2 > 1$

Per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente

# Criterio di convergenza assoluta

Sia  $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile su ogni intervallo  $[a, b]$  con  $a < b$ . Diremo che l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

converge assolutamente se risulta

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

# Teorema

Sia  $f$  una funzione integrabile su  $[a, +\infty)$  (con segno alterno) e tale che  $\int_a^{+\infty} |f(x)| \, dx$  converga. Allora anche  $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$  converge e

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) \, dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| \, dx$$

## Nota:

- La convergenza assoluta implica la convergenza semplice
- Se non converge assolutamente non possiamo dire nulla sulla convergenza semplice

# Esempio 3

Esaminare il comportamento di  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

## Soluzione

La funzione  $\frac{\sin x}{x}$  è continua in  $(0, +\infty)$  e, da  $x \rightarrow 0$   $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ , è prolungabile con continuità in  $x = 0$

Questo significa, preso  $x = 1$  come punto di suddivisione, che  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$  esiste e rimane da verificare la convergenza di  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

# Esempio 3

Essendo

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$$

si ha  $\alpha = 1$ , e quindi l'integrale improprio  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$  è divergente

Quindi, non possiamo concludere nulla sulla convergenza di  $I$

# Esempio 3

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx &= \left( \begin{array}{ll} u = \frac{1}{x}, & u' = -\frac{1}{x^2} \\ v' = \sin x, & v = -\cos x \end{array} \right) \\ &= \left[ \frac{-\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx\end{aligned}$$

Da

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

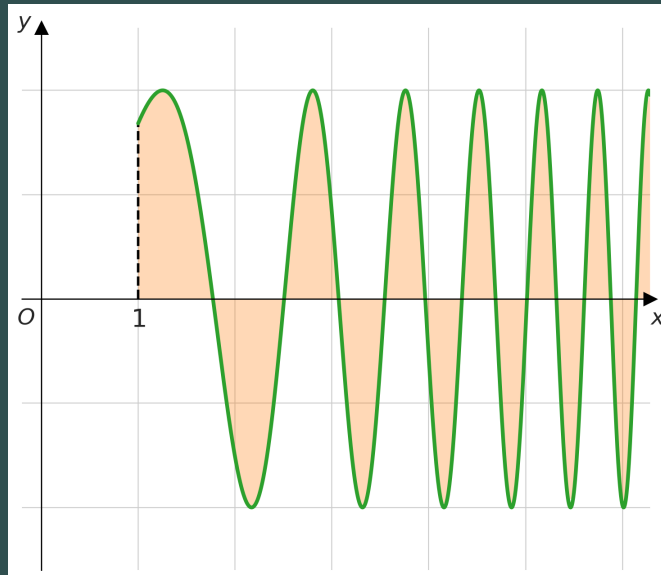
per il criterio del confronto  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  è convergente e quindi anche  $I$  converge

# Esempio 4

Esaminare il comportamento di  $I = \int_1^{+\infty} \sin x^2 dx$

## Soluzione

$\sin x^2$  è continua in  $[1, +\infty)$  (e limitata) ma non ammette limite in  $x \rightarrow +\infty$ , quindi non possiamo applicare nessun criterio di convergenza / divergenza visti in precedenza



# Esempio 4

Sfruttiamo la definizione integrando opportunamente per parti

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \sin x^2 dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} \cdot 2x \sin x^2 dx \\&= \left[ -\frac{1}{2x} \cos x^2 \right]_1^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos x^2 dx \\&= \frac{1}{2} \cos 1 - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos x^2 dx\end{aligned}$$

Da

$$\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

per il criterio del confronto  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$  è convergente e quindi anche  $I$  converge

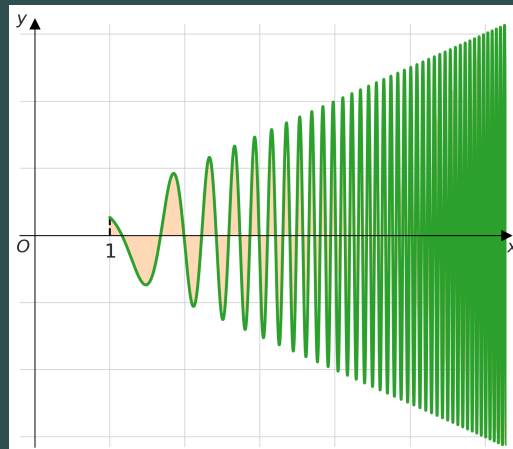
# Esempio 5

Esaminare il comportamento di  $I = \int_1^{+\infty} x \cos x^3 dx$

## Soluzione

$x \cos x^3$  è continua in  $[1, +\infty)$  e non limitata dove non ammette limite in  $x \rightarrow +\infty$

Quindi non possiamo applicare nessun criterio di convergenza / divergenza visti in precedenza



# Esempio 5

Sfruttiamo la definizione integrando opportunamente per parti

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} x \cos x^3 dx &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{3x} \cdot 3x^2 \cos x^3 dx \\ &= \left[ \frac{1}{3x} \sin x^3 \right]_1^{+\infty} + \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin x^3 dx \\ &= -\frac{1}{3} \sin 1 + \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin x^3 dx\end{aligned}$$

Da

$$\left| \frac{\sin x^3}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

per il criterio del confronto  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x^2} dx$  è convergente e quindi anche  $I$  converge

# Altri casi

- Se  $f(x): (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  poniamo

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

- Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato, poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

ovvero, utilizzando la proprietà di suddivisione, si possono studiare separatamente i due limiti

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx$$

A close-up profile of a dog's head, likely a Bernese Mountain Dog, with its tongue out. The image is overlaid with a semi-transparent teal filter. The word "FINE" is written in a bold, yellow, sans-serif font across the middle of the dog's face.

FINE