Integrale improprio su intervallo illimitato

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Integrale improprio su intervalli illimitati

Definizione

Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f(x)$: $[a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Se esiste $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$ poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

Tre casi possibili. Diremo che

1. f ammette integrale improprio, e quindi **convergente** su $[a, +\infty)$, se il limite esiste finito
2. l'integrale di f **diverge** positivamente o negativamente se il limite vale $+\infty$ o $-\infty$
3. l'integrale improprio di f **oscilla** (o non esiste) se il limite non esiste

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempi

1. $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ è **convergente** perché

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx \;=\; \left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} \;=\; e^{-1}$$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ è **divergente** perché

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \;=\; [\ln x]_1^{+\infty} \;=\; +\infty$$

3. $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx$ è **oscillante** perché

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,dx \;=\; [\sin x]_0^{+\infty} \;\in [-1, 1]$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Casi simili

1. Analoga definizione per il caso $(-\infty, a]$

2. Se il dominio di f è $(-\infty, +\infty)$ allora l'integrale è convergente sse è convergente in $(-\infty, x_0]$ e in $[x_0, +\infty)$ per un x_0 opportuno

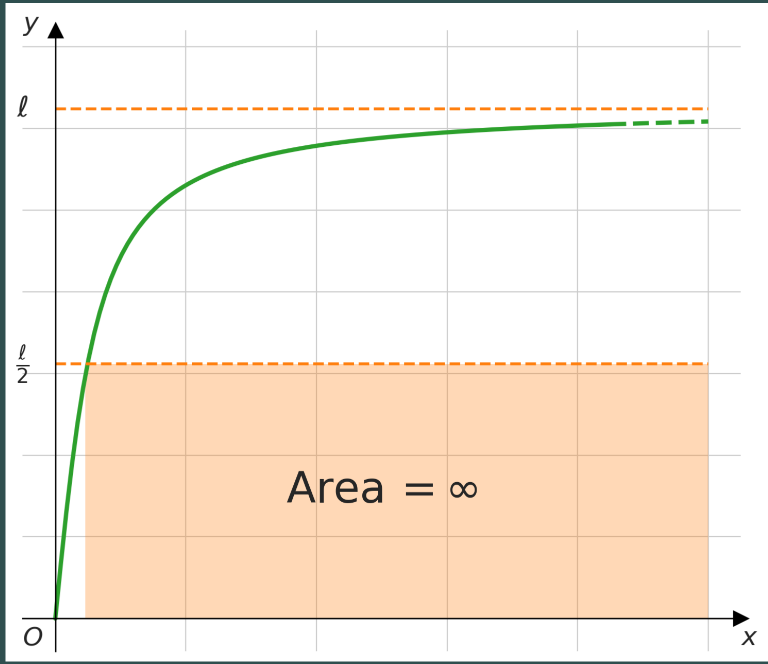
3. Se il dominio di f è $[a, +\infty) \setminus \{x_0\}$ allora l'integrale è convergente sse è convergente in $[a, x_0)$, $(x_0, b]$ e in $[b, +\infty)$ con $b > x_0$
   - dove $[a, x_0)$ e $(x_0, b]$ sono da trattare come integrali impropri su un intervallo limitato

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teorema

Se f è una **funzione positiva** e localmente integrabile su $[a, +\infty)$, allora il suo integrale improprio o **converge o diverge** (i.e. non può oscillare)

Quindi, se f è una funzione positiva e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, allora $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è divergente



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Teorema: convergenza degli infinitesimi fondamentali

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{se } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \begin{cases} \left[\ln x\right]_{x=1}^{t} & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}\left[x^{1-\alpha}\right]_{x=1}^{t} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} \\ &= \lim_{t\to+\infty} \begin{cases} \ln t & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

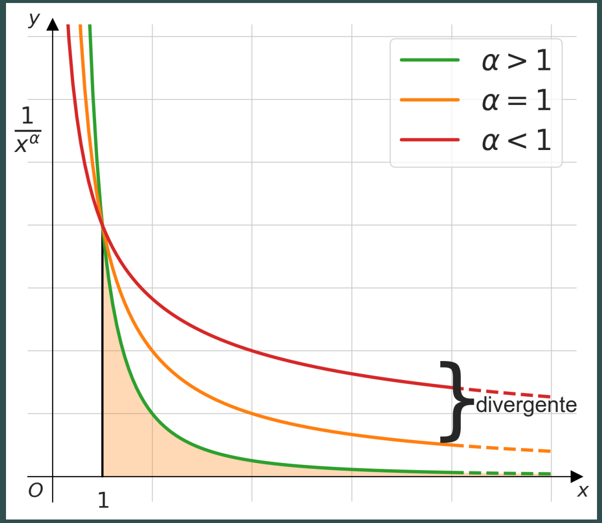
Interpretazione grafica

Dall'esempio precedente risulta che non è sufficiente che f sia infinitesima a $+\infty$ affiché sia convergente l'integrale improprio, infatti:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$$

Quindi

- l'area dell'iperbole equilatera è divergente
- l'area di una funzione potenza al di sopra dell'iperbole equilatera è divergente
- l'area di una funzione potenza al di sotto dell'iperbole equilatera è convergente



Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

FINE

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)