Integrale improprio su intervallo limitato e criteri di confronto

(Integrale improprio) Calcolo integrale

Manolo Venturin

~~~ 22 ~~~

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)
~~~

Donazione

Se apprezzi le mie slide, considera di fare una donazione per supportare il mio lavoro.

Grazie!

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Criteri di confronto

Studio della convergenza dell'integrale improprio (senza il calcolo della primitiva che potrebbe non essere possibile)

Tipi di convergenza:

- Assoluta convergenza (per le funzioni a segno alterno): lezione precedente
- Criterio del confronto per **funzioni a segno costante**
  - Criterio del confronto asintotico
  - Criterio dell'ordine di infinito

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Criteri di confronto

Premessa

Se $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ non negativa allora l'integrale improprio $\int_a^b f(x)\,dx$ o converge o diverge positivamente

Teorema

Siano f e g due funzioni localmente integrabili su $[a,b)$ t.c. $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in [a,b)$. Allora

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Inoltre,

- se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, allora $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge
- se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, allora $\int_a^b f(x)\,dx$ converge

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Criterio del confronto asintotico

Teorema Sia f localmente integrabile su $x \in [a, b)$ ed esiste $\ell \neq 0$ (importantissimo) tale che per $x \to b^-$ si abbia

$$f(x) \sim \frac{\ell}{(b-x)^\alpha}$$

Allora

- $\int_a^b f(x)\,dx$ converge sse $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ converge sse $\alpha < 1$
- $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge sse $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ diverge sse $\alpha \geqslant 1$

Nota:

- Simile discorso per l'intervallo aperto in $x = a$
- Si richiede di saper sviluppare una funzione in serie di Taylor

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

> Studiare la convergenza di $I = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 4x + 3}\, dx$

Soluzione

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

- è finita in $x = 2$ e continua in $[2, 3)$
- per $x \to 3^-$ si ha $f(x) \to -\infty$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 1

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$$

Per $x \to 3^-$ si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{2(x-3)^1} \qquad \text{infatti} \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{\frac{1}{(x-1)(x-3)}}{\frac{1}{2(x-3)^1}} = 1$$

$\frac{1}{2(x-3)^1}$ non è integrabile ($\alpha = 1 \geqslant 1$) e quindi neanche I lo è (in base al confronto asintotico)

Si potrebbe osservare che la funzione è sempre negativa e quindi l'integrale diverge a $-\infty$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

> Studiare la convergenza di $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^2}}\,dx$

Soluzione

La funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)(1+x)}}$$

- è finita in $x = 0$ e continua in $[0, 1)$
- per $x \to 1^-$ si ha $f(x) \to +\infty$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)(1+x)}}$$

Per $x \to 1^-$ si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[5]{2}(1-x)^{\frac{1}{5}}}$$

che è integrabile ($\alpha = \frac{1}{5} < 1$) e quindi anche I lo è (in base al confronto asintotico)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Esempio 3

> Studiare la convergenza di $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-\cos x}}\, dx$

Soluzione

Nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione integranda è illimitata solo per $x = 0$

Per $x \to 0$ si ha $1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ da cui

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-\cos x}} \sim \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

che per il criterio del confronto asintotico è integrabile in un intorno dello zero ($\alpha = \frac{2}{3} < 1$)

Quindi I è integrabile

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Richiamo (simboli di Landau)

Se $g(x_0) \neq 0$ nell'interno di x_0, si ha

- o-piccolo:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

- O-grande:

$$f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R}$$

- equivalenza asintotica:

$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Principali sviluppi asintotici

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots + o(x^5)$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Principali sviluppi asintotici

Quindi, per $x \to 0$:

$$e^x \sim 1 + x + o(x)$$

o

$$e^x \sim 1 + x + O(x^2)$$

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)

Manolo Venturin (CC BY-NC-ND)